Exo 1

1) (2pts) $x\in\mathbb{R}$ est un <u>minorant de S</u> si $\forall y\in S, x\leq y$.

<u>majorant de S</u> si $\forall y\in S, x\geq y$.

$x\in\mathbb{R}$ est un <u>min</u> de S si $x\in S$ et x minore S

<u>max</u> de S ... majore

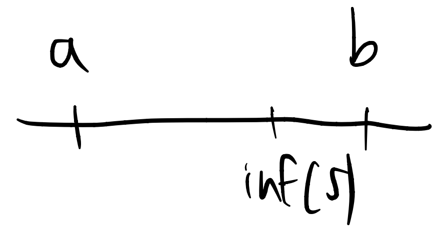
$x\in\mathbb{R}$ est un <u>sup</u> de S si x majore S et pour tout majorant y de S, $x\leq y$.

<u>inf</u> de S si x minore S et pour tout minorant y de S, $x\geq y$.

2) $S=]0,1[$ (1pt) $\inf(S)=0$: par construction 0 minore S, et si $x\in\mathbb{R}$ minore S, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ t.q. $n\geq 2$, $x\leq \frac{1}{n}$ donc $x\leq 0$.

S n'a pas de minimum, car s'il en avait un ce min serait égal à $\inf(S)=0$, mais $0\notin S$.

3) (2pts) $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de S t.q. $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \inf(S)$.



On prend $\varepsilon=\min\{(b-\inf(S)),(\inf(S)-a)\}>0$.
pour n assez grand, $x_n\in S$, $x_n\in\,]\inf(S)-\varepsilon,\inf(S)+\varepsilon[\,\subset\,]a,b[$.
d'où $S\cap\,]a,b[\,\neq\emptyset$

4) (1pt) On prend une suite (x_n) d'éléments de S, $x_n\xrightarrow{n\to\infty}\inf(S)$
soit $\varepsilon=c-\inf(S)$, et $N\in\mathbb{N}$ t.q. $n\geq N\Rightarrow x_n\in\,]\inf(S)-\varepsilon,\inf(S)+\varepsilon[$.
alors $x_N\leq\inf(S)$ car $]\inf(S),c[\,\cap S=\emptyset$.
mais par définition de l'inf, $\inf(S)\leq x_N$, donc $x_N=\inf(S)$
et $\inf(S)\in S$, et $\inf(S)$ est un minimum.

5) (2pts) • Pour tout $y\in(-S)$, $-y\in S$ donc $-y\leq\sup(S)$
ce qui donne $y\geq-\sup(S)$
donc $-\sup(S)$ est <u>un</u> minorant de $(-S)$.
montrons que c'est le plus <u>grand</u> minorant de $(-S)$ (*)
Soit $z\in\mathbb{R}$ un minorant de $(-S)$. Alors $\forall y\in S$,
$(-y)\in(-S)$, donc $z\leq -y$ et $y\leq -z$, càd. $-z$ majore S.
Comme $\sup(S)$ est le plus petit majorant de S,
$-z\geq\sup(S)$, et $z\leq-\sup(S)$.
(*) est vrai, donc $\inf(-S)=-\sup(S)$

L'autre égalité en découle, si $T=-S$, $-T=S$ et
$-\inf(S)=-\inf(-T)=\sup(T)=\sup(-S)$.

Exo 2

1) $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ t.q. $|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

2) Soit $\varepsilon>0$, et $\delta_1>0$ t.q. $|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\delta_2>0$ t.q. $|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-g(a)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

prenons $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$.

Si $|x-a|<\delta$, $|(f+g)(x)-(f+g)(a)| =$

$|f(x)-f(a)+g(x)-g(a)|$

$< |f(x)-f(a)|+|g(x)-g(a)|$

$= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

CQFD.

Exo 3

1) $\frac{3n^2+(-1)^n}{2n-1} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$

pour tout n, $\{u_k \mid k\geq n\}$ n'est pas majoré $\to$ pas de limsup

$\forall M, \exists N$ t.q. $k\geq N \Rightarrow u_k\geq M$

donc $\inf\{u_k \mid k\geq n\}\geq M$

et $\inf\{u_k \mid k\geq n\}$ n'est pas non plus minorée

$\to$ liminf n'existe pas non plus

2) $\forall n, -1\leq \cos\frac{n\pi}{2023}\leq 1$

la suite bornée, donc lim inf, limsup existent et

$-1\leq \liminf u_n \leq \limsup u_n \leq 1$

Par ailleurs, $\forall n$, $u_{4046\cdot n}=1$, il y a une sous-suite qui converge vers 1 donc $\limsup u_n \geq 1$ (exo TD).

De même, $\forall n$, $u_{(2n+1)\cdot 2023}=-1$, il y a une sous-suite qui converge vers -1 donc $\liminf u_n\leq -1$.

Les inégalités ci-dessus donnent $\liminf u_n=-1$, $\limsup u_n=1$.

3) $\frac{\sin n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ d'où $\limsup u_n=\liminf u_n=0$

Exo 4

1) Soient $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall n \ |u_n| \leq M_1$
$|v_n| \leq M_2$

alors $\forall n \ |u_n+v_n| \leq |u_n|+|v_n| \leq M_1+M_2$
donc (u_n+v_n) est bornée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $s_n = \sup\{u_k \mid k \geq n\}$
$t_n = \sup\{v_k \mid k \geq n\}$
$x_n = \sup\{u_k+v_k \mid k \geq n\}$

pour $k \geq n$, on a
$u_k+v_k \leq s_n+t_n$

donc $x_n \leq s_n+t_n$, et en passant à la lim ($n \to \infty$)

on a $\limsup (u_n+v_n) \leq \limsup(u_n) + \limsup(v_n)$.

2) $u_n = (-1)^n$, $\forall n$, $u_n+v_n = 0$.
$v_n = (-1)^{n+1}$

$\limsup u_n = 1$
$\limsup v_n = 1$
$\limsup (u_n+v_n) = 0$.

3) Soit $\varepsilon > 0$ et N_1 t.q. $n \geq N_1 \Rightarrow |v_n - v| < \varepsilon$.

$s_n = \sup\{u_k \mid k \geq n\} \xrightarrow{n\to\infty} \limsup u_n$.

On prend $N_2 \in \mathbb{N}$ t.q. pour $n \geq N_2$, on a $s_n > \limsup u_n - \varepsilon$
et on pose $N = \max\{N_1, N_2\}$.

$s_N > \limsup(u_n) - \varepsilon$, donc $\exists k \geq N$ t.q.
$u_k > \limsup(u_n) - \varepsilon$, et alors $u_k+v_k \geq \limsup u_n - \varepsilon + v - \varepsilon$
$= \limsup u_n + v - 2\varepsilon$.

ceci implique $\sup\limits_{k\geq n}(u_k+v_k) \geq \limsup u_n + v - 2\varepsilon$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, $\limsup (u_n+v_n) \geq \limsup(u_n) + v$

4) $\limsup (x_n) = \limsup \left(\frac{n\pi}{2023}\right) + 0 = 1$

(par Exo 3 (2,3) et le résultat montré dans la question 3))