De combien de façons différentes peut-on obtenir un score au rugby ?

Une analyse mathématique avec des séries génératrices dedans

Le comité sportif de l'Institut Fourier

Le rugby a un système de scores très particulier. Au lieu d'avancer un point par un point, le score avance :

- de 3 points pour un drop ou une pénalité,
- de 5 points pour un essai non transformé,
- de 7 points pour un essai transformé.

Tout mathématicien confronté à cette façon de compter va inévitablement se poser deux questions :

i) Y a-t-il des scores qui ne peuvent pas exister au rugby ?

ii) A partir d'un score, peut-on deviner le nombre d'essais marqués ?

Nous allons discuter de ces questions et nous verrons comment des outils mathématiques classiques permettent d'apporter des réponses.

1 Travail manuel

Avec un papier et un crayon, on peut assez rapidement répondre aux questions ci-dessus.

Proposition 1.1. *Les seuls scores qui ne peuvent exister au rugby sont* 1,2 *et* 4*.*

Démonstration : Il est clair que 1, 2 et 4 ne sont pas réalisables. A l'inverse, on réalise facilement les scores 5, 6 et 7. Par conséquent, on peut réaliser en ajoutant k drops les scores $5+3k$, $6+3k$ et $7+3k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui permet d'atteindre tous les entiers au-dessus de 5. □

Pour la deuxième question, on peut lister ce qu'il se passe pour les 21 premiers scores comme dans le tableau de la figure 1. On en déduit le résultat suivant.

Score	Pénalités ou drops	Essais non transformés	Essais transformés
0	0	0	0
1	–	–	–
2	–	–	–
3	1	0	0
4	–	–	–
5	0	1	0
6	2	0	0
7	0	0	1
8	1	1	0
9	3	0	0
10	1	0	3
	0	2	0
11	2	1	0
12	4	0	0
	0	1	1
13	2	0	1
	1	2	0
14	3	1	0
	0	0	2
15	5	0	0
	1	1	1
	0	3	0
16	3	0	1
	2	2	0
17	4	1	0
	1	0	2
	0	2	1
18	6	0	0
	2	1	1
	1	3	0
19	4	0	1
	3	2	0
	0	1	2
20	5	1	0
	2	0	2
	1	2	1
	0	4	0

FIGURE 1 – *Les différentes façons de faire les 21 premiers scores au rugby.*

Proposition 1.2. *Pour le score* 10 *et tous les scores au-dessus de* 12*, il n'est pas possible de deviner le nombre d'essais marqués par l'équipe.*

Démonstration : Il suffit de considérer le tableau de la figure 1, puis de voir que la proposition est vraie pour les trois scores consécutifs 12, 13 et 14. Comme on peut réaliser tous les scores suivants en ajoutant un certain nombre de pénalités à partir des différentes réalisations de 12, 13 ou 14, on en déduit que pour tous les scores au-dessus de 12, il existe plusieurs façons de réaliser ces scores avec un nombre d'essais différents. $\square$

2 Avec l'aide d'un ordinateur

Dans le tableau de la figure 1, on voit que les cases prennent de plus en plus de place : le nombre de façons de réaliser un score augmente avec ce score. Si c_n est le nombre de façons de décomposer le score n au rugby, on peut se demander comment grandit c_n en fonction de n. Pour se faire une idée sur la question, rien de tel qu'un petit programme informatique. En utilisant le logiciel *Scilab*, on obtient les graphiques de la figure 2. L'étude de ces données montre que, expérimentalement,

$$c_n \;=\; 0,0047619\, n^2 + 0,071086\, n + \mathcal{O}(1) \qquad \text{quand } n \longrightarrow +\infty \ . \tag{2.1}$$

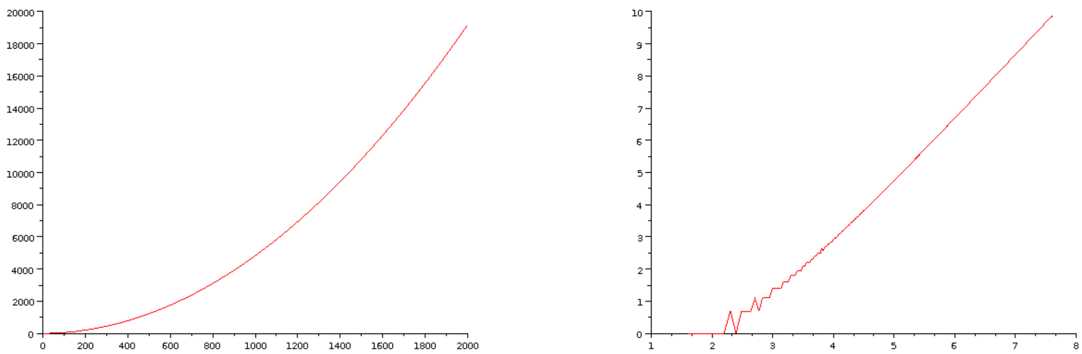

FIGURE 2 – *Le nombre c_n de façons de décomposer le score n au rugby. A gauche, le graphique c_n en fonction de n et, à droite, le graphique $\ln(c_n)$ en fonction de $\ln(n)$.*

3 Avec des techniques mathématiques

Essayons de prouver mathématiquement l'asymptotique (2.1). Pour nous faire la main, essayons de voir combien il y a de façons de décomposer un nombre n sous la forme $a \times 3$.

Evidemment, soit n est multiple de 3 et il y a une possibilité, soit n n'est pas multiple de 3 et il n'y a pas de solution : asymptotiquement, le nombre de décompositions en $a \times 3$ est de l'ordre de $\mathcal{O}(1)$. Combien de façons sous la forme $a \times 3 + b \times 5$? On voit qu'il y a ambiguïté pour toute création d'une quinzaine car 15 peut être soit 3×5, soit 5×3. Du coup, on se convainc que le nombre de façons de décomposer n sous la forme $a \times 3 + b \times 5$ est de l'ordre de $n/15$.

Le cas $a \times 3 + b \times 5 + c \times 7$ commence à être trop complexe pour un raisonnement simple comme ci-dessus. Du coup, nous allons utiliser une méthode générale et classique en mathématique : les séries génératrices. Nous allons établir le résultat suivant.

Theorem 3.1. *Le nombre c_n de façons de décomposer n sous la forme $a \times 3 + b \times 5 + c \times 7$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ vérifie*

$$c_n \; = \; \frac{n^2}{210} + \frac{n}{14} + \mathcal{O}(1) \qquad \text{quand } n \longrightarrow +\infty \; .$$

En outre, le terme d'erreur $\mathcal{O}(1)$ est $105-$périodique et toujours plus petit que 1 sauf pour $n = 45$ mod 105 où l'erreur est plus petite que 2.

L'application numérique retrouve précisemment (2.1) puisque

$$\frac{1}{210} \simeq 0.0047619048\ldots \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{14} \simeq 0.0714285\ldots$$

On peut aussi tester notre formule pour quelques cas :

n	20	50	100	500	1000
c_n (exact)	4	16	55	1227	4834
$n^2/210 + n/14$	3,33	15,47	54,76	1226,19	4833,33

La formule est extraordinairement précise car le terme $\mathcal{O}(1)$ est quasiment toujours plus petit que 1. En fait, comme ce terme est périodique, nous verrons plus loin qu'il peut se calculer de façon exacte et donc que notre formule permet d'écrire un programme donnant la formule exacte de c_n (voir la partie suivante).

Ainsi, on peut affirmer que pour le match Toulouse–Grenoble du 29/11/2014, remporté 22–25 par Grenoble, il y a 20 façons d'obtenir ce score car

$$\frac{22^2}{210} + \frac{22}{14} \simeq 3,87 \quad \text{et} \quad \frac{25^2}{210} + \frac{25}{14} \simeq 4,76 \; .$$

La fin de cette partie sera dédiée à la démonstration du théorème 3.1. Cette preuve utilise la technique des séries génératrices (le lecteur intéressé pourra consulter [1] pour en apprendre plus).

Nous allons considérer la fonction

$$S(z) = \frac{1}{1-z^3}\frac{1}{1-z^5}\frac{1}{1-z^7}$$

On connait les développements en série entière

$$\frac{1}{1-z^3} = \sum_{a\in\mathbb{N}} z^{3a} \quad , \quad \frac{1}{1-z^5} = \sum_{b\in\mathbb{N}} z^{5b} \quad \text{et} \ \frac{1}{1-z^7} = \sum_{c\in\mathbb{N}} z^{7c}$$

Pour le développement en série entière de $S(z)$, il faut considérer qu'un z^n va arriver par le produit d'un z^{3a}, d'un z^{5b} et d'un z^{7c} avec $n = 3a+5b+7c$. Donc, on aura autant de z^n que de façons d'écrire n comme $n = 3a+5b+7c$. Au final,

$$S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n \tag{3.1}$$

avec c_n le nombre dont on cherche l'asymptotique.

Par ailleurs, si on note θ_j les différentes racines $3^{\text{ième}}$, $5^{\text{ième}}$ et $7^{\text{ième}}$ de l'unité qui ne sont pas égales à 1, alors

$$(1-z^3)(1-z^5)(1-z^7) = (1-z)^3 \prod_j (\theta_j - z) \ .$$

Comme les θ_j sont tous distincts (3, 5 et 7 sont premiers deux à deux), la décomposition en éléments simples nous dit que

$$S(z) = \frac{\alpha}{(1-z)^3} + \frac{\beta}{(1-z)^2} + \frac{\gamma}{1-z} + \sum_j \frac{\delta_j}{\theta_j - z} \tag{3.2}$$

avec α, β, γ et δ_j des constantes à préciser. Par ailleurs, le développement en série entière de chaque terme est

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n\in\mathbb{N}} z^n \qquad \frac{1}{\theta_j - z} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{\theta_j^{n+1}}$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) z^n \qquad \frac{1}{(1-z)^3} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(n+2)(n+1)}{2} z^n$$

(pour trouver les deux derniers développements, il suffit de dériver le premier). Du coup, l'identification de (3.1) et (3.2) implique

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\alpha}{2} n^2 + \left(\frac{3\alpha}{2} + \beta\right) n + \left(\alpha + \beta + \gamma + \sum_j \frac{\delta_j}{\theta_j^{n+1}}\right) \\ &= \frac{\alpha}{2} n^2 + \left(\frac{3\alpha}{2} + \beta\right) n + \mathcal{O}(1) \ . \end{aligned} \tag{3.3}$$

Calculons les coefficients α et β. Pour cela, on va regarder le comportement de $S(z)$ près de 1 en posant $h = 1 - z$:

$$
\begin{aligned}
S(z) &= \frac{1}{\big(1-(1-h)^3\big)\big(1-(1-h)^5\big)\big(1-(1-h)^7\big)} \\
&= \frac{1}{\big(1-(\sum_{k=0}^{3} C_3^k(-h)^k)\big)\big(1-(\sum_{k=0}^{5} C_5^k(-h)^k)\big)\big(1-(\sum_{k=0}^{7} C_7^k(-h)^k)\big)} \\
&= \frac{1}{h^3}\,\frac{1}{\big(\sum_{k=0}^{2} C_3^{k+1}(-h)^k\big)\big(\sum_{k=0}^{4} C_5^{k+1}(-h)^k\big)\big(\sum_{k=0}^{6} C_7^{k+1}(-h)^k\big)} \\
&= \frac{1}{h^3}\,\frac{1}{C_3^1C_5^1C_7^1 \,-\, \big(C_3^2C_5^1C_7^1 + C_3^1C_5^2C_7^1 + C_3^1C_5^1C_7^3\big)h + \mathcal{O}(h^2)} \\
&= \frac{1}{h^3}\left(\frac{1}{C_3^1C_5^1C_7^1} + \frac{C_3^2C_5^1C_7^1 + C_3^1C_5^2C_7^1 + C_3^1C_5^1C_7^3}{(C_3^1C_5^1C_7^1)^2}h + \mathcal{O}(h^2)\right) \\
&= \frac{1}{h^3}\left(\frac{1}{3\times5\times7} + \frac{1}{2}\left(\frac{3-1}{3\times5\times7} + \frac{5-1}{3\times5\times7} + \frac{7-1}{3\times5\times7}\right)h + \mathcal{O}(h^2)\right)
\end{aligned}
$$

où on a utilisé que $C_p^1 = p$ et $C_p^2 = \frac{p(p-1)}{2}$. Comme d'autre part, (3.2) dit que

$$S(z) = \frac{\alpha}{h^3} + \frac{\beta}{h^2} + \mathcal{O}\big(\frac{1}{h}\big) \ ,$$

on trouve que

$$\alpha = \frac{1}{3\times5\times7} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{1}{2}\left(\frac{3-1}{3\times5\times7} + \frac{5-1}{3\times5\times7} + \frac{7-1}{3\times5\times7}\right) \ .$$

La formule pour c_n donne donc

$$c_n \;=\; \frac{1}{2\times3\times5\times7}n^2 \;+\; \frac{3+5+7}{2\times3\times5\times7}n \;+\; \mathcal{O}(1) \ ,$$

où on pourra remplacer 3, 5 et 7 par trois autres nombres premiers deux à deux si on regarde d'autres types de décompositions. On obtient bien l'asymptotique énoncée dans le théorème 3.1.

Concernant le terme $\mathcal{O}(1)$ de (3.3), on note que chaque θ_j^{n+1} est 3, 5 ou 7 périodique (suivant que θ_j est une racine $3^{\text{ième}}$, $5^{\text{ième}}$ ou $7^{\text{ième}}$ de l'unité). Du coup, le reste $\mathcal{O}(1)$ de (3.3) est au pire $3\times5\times7 = 105-$périodique. Il suffit donc de calculer l'erreur de la formule dans les 105 premiers cas pour vérifier que ce reste est plus petit que 1, sauf pour $n = 45$.

4 La formule exacte

En alliant l'analyse mathématique et un petit programme informatique, on a donc trouvé la formule exacte. En effet, il suffit de lancer un programme calculant le terme

$\mathcal{O}(1)$ de (3.3) pour les 105 premières valeurs de n. On obtient la suite :

$$\frac{105}{105},\ \frac{-8}{105},\ \frac{-17}{105},\ \frac{78}{105},\ \frac{-38}{105},\ \frac{55}{105},\ \frac{42}{105},\ \frac{28}{105},\ \frac{13}{105},\ \frac{-3}{105},\ \frac{85}{105},\ \frac{-38}{105},\ \frac{48}{105},\ \frac{28}{105},\ \frac{7}{105},\ \frac{90}{105},$$
$$\frac{-38}{105},\ \frac{43}{105},\ \frac{18}{105},\ \frac{-8}{105},\ \frac{70}{105},\ \frac{42}{105},\ \frac{13}{105},\ \frac{-17}{105},\ \frac{57}{105},\ \frac{25}{105},\ \frac{-8}{105},\ \frac{63}{105},\ \frac{28}{105},\ \frac{-8}{105},\ \frac{60}{105},\ \frac{22}{105},$$
$$\frac{-17}{105},\ \frac{48}{105},\ \frac{7}{105},\ \frac{70}{105},\ \frac{27}{105},\ \frac{-17}{105},\ \frac{43}{105},\ \frac{-3}{105},\ \frac{55}{105},\ \frac{7}{105},\ \frac{63}{105},\ \frac{13}{105},\ \frac{-38}{105},\ \frac{120}{105},\ \frac{-38}{105},\ \frac{13}{105},$$
$$\frac{63}{105},\ \frac{7}{105},\ \frac{55}{105},\ \frac{-3}{105},\ \frac{43}{105},\ \frac{-17}{105},\ \frac{27}{105},\ \frac{70}{105},\ \frac{7}{105},\ \frac{48}{105},\ \frac{-17}{105},\ \frac{22}{105},\ \frac{60}{105},\ \frac{-8}{105},\ \frac{28}{105},\ \frac{63}{105},$$
$$\frac{-8}{105},\ \frac{25}{105},\ \frac{57}{105},\ \frac{-17}{105},\ \frac{13}{105},\ \frac{42}{105},\ \frac{70}{105},\ \frac{-8}{105},\ \frac{18}{105},\ \frac{43}{105},\ \frac{-38}{105},\ \frac{90}{105},\ \frac{7}{105},\ \frac{28}{105},\ \frac{48}{105},\ \frac{-38}{105},$$
$$\frac{85}{105},\ \frac{-3}{105},\ \frac{13}{105},\ \frac{28}{105},\ \frac{42}{105},\ \frac{55}{105},\ \frac{-38}{105},\ \frac{78}{105},\ \frac{-17}{105},\ \frac{-8}{105},\ \frac{105}{105},\ \frac{7}{105},\ \frac{13}{105},\ \frac{18}{105},\ \frac{22}{105},\ \frac{25}{105},$$
$$\frac{27}{105},\ \frac{28}{105},\ \frac{28}{105},\ \frac{27}{105},\ \frac{25}{105},\ \frac{22}{105},\ \frac{18}{105},\ \frac{13}{105},\ \frac{7}{105}.$$

On peut donc facilement faire un programme donnant le nombre c_n exact grâce au théorème 3.1 et à la liste des 105 restes possibles, puisque ces restes sont périodiques. C'est un bel exemple de résultat mélangeant une analyse mathématique abstraite et un calcul informatique pour obtenir une formule exacte.

Voici un exemple de programme en langage Scilab :

```
function c=score(n)
  u=[105,-8,-17,78,-38,55,42,28,13,-3,85,-38,48,28,7,90,-38,43,18,..
  -8,70,42,13,-17,57,25,-8,63,28,-8,60,22,-17,48,7,70,27,-17,43,..
  -3,55,7,63,13,-38,120,-38,13,63,7,55,-3,43,-17,27,70,7,48,-17,22,..
  60,-8,28,63,-8,25,57,-17,13,42,70,-8,18,43,-38,90,7,28,48,-38,..
  85,-3,13,28,42,55,-38,78,-17,-8,105,7,13,18,22,25,27,28,28,..
  27,25,22,18,13,7];
  nmod=n-floor(n/105)*105;
  c=n.^2/210+n/14+u(nmod+1)/105;
endfunction;
```

On trouve ainsi qu'il y a 476 905 façons de faire le score 10 000 au rugby, n'est-ce pas formidable ?

Références

[1] Philippe Flajolet et Robert Sedgewick, *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
Téléchargeable : `http://algo.inria.fr/flajolet/Publications/book.pdf`