

---

Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, présenté par

Romain JOLY

---

# Dynamique des EDP dissipatives

---

*Soutenu le 19 novembre 2013 après avis de :*

|                   |                                  |
|-------------------|----------------------------------|
| Nicolas BURQ      | Université Paris-Sud             |
| Jean-Michel CORON | Université Pierre et Marie Curie |
| Bernold FIEDLER   | Freie Universität Berlin         |

*devant le jury composé de :*

|                   |                                  |
|-------------------|----------------------------------|
| Patrick BERNARD   | Université Paris-Dauphine        |
| Nicolas BURQ      | Université Paris-Sud             |
| Jean-Michel CORON | Université Pierre et Marie Curie |
| Bernold FIEDLER   | Freie Universität Berlin         |
| Thierry GALLAY    | Université Joseph Fourier        |
| Geneviève RAUGEL  | Université Paris-Sud             |



# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Remerciements</b>   | <b>i</b>  |
| <b>Travaux présentés</b>   | <b>iv</b> |
| <b>Chapitre 1 : Introduction</b>   | <b>1</b>  |
| 1 Motivation . . . . .   | 1         |
| 2 Vocabulaire de base pour les systèmes dynamiques . . . . .   | 2         |
| 3 Dissipation, attracteurs et systèmes de type gradient . . . . .                                    | 6         |
| 4 Stabilité et propriétés de Kupka-Smale et Morse-Smale . . . . .                                    | 9         |
| 5 Un historique concernant la dimension finie . . . . .  | 12        |
| 6 Le passage à la dimension infinie . . . . .  | 13        |
| <b>Chapitre 2 : La généricité et les notions de « presque toujours »</b>                             | <b>15</b> |
| 1 Introduction . . . . .   | 15        |
| 2 Théorèmes de transversalité . . . . .  | 18        |
| 3 Topologie de Whitney . . . . .   | 23        |
| <b>Chapitre 3 : Dynamique générique des EDP paraboliques</b>   | <b>27</b> |
| 1 Introduction . . . . .   | 27        |
| 2 Un parallèle avec la dynamique en dimension finie . . . . .  | 28        |
| 3 Propriétés de Kupka-Smale et de Morse-Smale : récapitulatif . . . . .                              | 32        |
| 4 Outils principaux . . . . .  | 33        |
| 5 Quelques perspectives . . . . .  | 39        |
| <b>Chapitre 4 : Dissipativité de l'équation des ondes amorties et application au contrôle global</b> | <b>41</b> |
| 1 Rappels sur les équations des ondes amorties . . . . .   | 41        |
| 2 Existence d'un attracteur global compact . . . . .   | 44        |
| 3 Application au contrôle global de l'équation des ondes . . . . .                                   | 48        |
| 4 Quelques perspectives . . . . .  | 50        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Chapitre 5 : Étude de fronts dans des EDP dissipatives</b>   | <b>53</b> |
| 1 Introduction . . . . .  | 53        |
| 2 Fronts dans les équations paraboliques scalaires . . . . .  | 55        |
| 3 Obtenir la stabilité globale des fronts grâce à une famille de fonctionnelles<br>de Lyapounov . . . . . | 58        |
| 4 Étude des profils asymptotiques des ondes de dépolarisation dans le cerveau                             | 62        |
| 5 Quelques perspectives . . . . .   | 64        |
| <b>Références</b>   | <b>66</b> |

## Remerciements

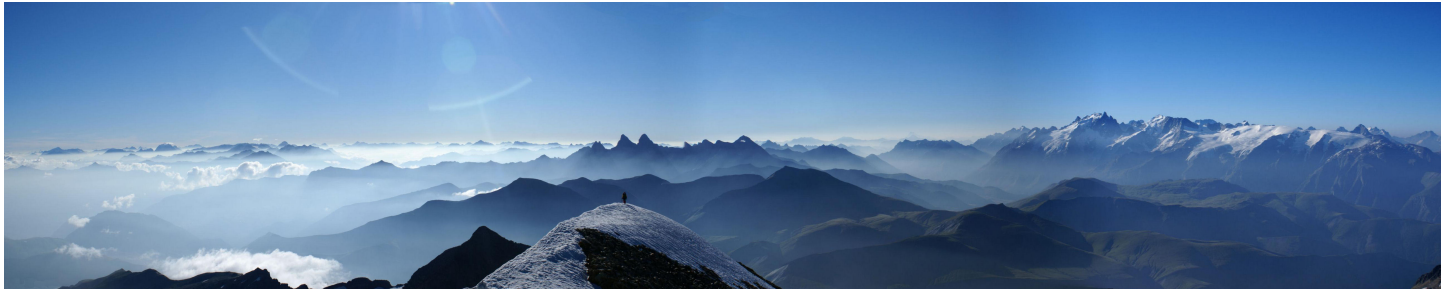
Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement Nicolas Burq, Jean-Michel Coron et Bernold Fiedler qui m'ont fait l'honneur de rapporter ce mémoire. Tous les trois m'ont connu quand j'étais étudiant ou tout jeune doctorant et, par leurs travaux, leurs cours et leurs conseils, ont guidé mes premiers pas d'enseignant-chercheur.

Je suis reconnaissant à Patrick Bernard d'avoir accepté de faire partie du jury. Je garde un très bon souvenir des discussions stimulantes dans l'air marin de Roscoff. Ce mémoire est aussi l'occasion d'exprimer toute ma gratitude à Thierry Gallay et Geneviève Raugel. Chacun a su encadrer mes débuts, à Paris comme à Grenoble, avec beaucoup de patience et de bienveillance. Leur portes ont toujours été ouvertes pour les discussions scientifiques ou les demandes de conseil. C'est un grand plaisir de les voir prendre part à ce jury.

L'activité scientifique est avant tout un travail en équipe. La plupart des travaux présentés ici sont le fruit de collaborations et je remercie profondément Geneviève Raugel, Thierry Gallay, Guillemette Chapuisat, Camille Laurent et Pavol Brunovský pour leurs contributions à ce mémoire et pour avoir eu la patience de supporter mes erreurs mathématiques et mes remaniements excessifs de rédaction. D'autres discussions, même si elles n'ont (pas encore) été consacrées par un théorème, ont aussi été très enrichissantes. Donc, merci aussi à Sylvain Crovisier, Éric Dumas, Marguerite Gisclon, Stéphane Labbé, Emmanuel Russ et toute l'équipe de physique mathématique de Grenoble.

Les recherches présentées dans ce mémoire ont été effectuées à l'Institut Fourier. Elles n'auraient pas vu le jour sans ceux qui font tourner les rouages de ce laboratoire (gestion du personnel, du budget et des missions, de l'informatique, du site web. . .), ni sans ceux qui s'occupent de l'approvisionnement en matières premières (livres, revues, café, thé du jeudi. . .). Merci à tous. J'aimerais enfin remercier très chaleureusement tous les collègues qui ont huilé ces rouages par leur bonne humeur et leur amitié. Ils se reconnaîtront sûrement parmi ces mots : barbecue, mousqueton, cyclisme et cyclimse, cochonnet, Bois Barbu, séminaire Chamrousse, Time's Up, Brassens, randonnée, joseki, coulemelle. . .





C'est alors seulement que l'intervention des mathématiques peut être utile ; les mathématiques nous apprennent, en effet, à combiner le semblable au semblable. Leur but est de deviner le résultat d'une combinaison, sans avoir besoin de refaire cette combinaison pièce à pièce. Si l'on a à répéter plusieurs fois une même opération, elles nous permettent d'éviter cette répétition en nous en faisant connaître d'avance le résultat par une sorte d'induction.

Henri Poincaré, *La science et l'hypothèse*

Since the mathematical universe of the mathematician is much larger than that of the physicist, mathematicians are able to go beyond existing frameworks and see geometrical or analytic structures unavailable to the physicist. Instead of using the particular equations used previously to describe reality, a mathematician has at his disposal an unused world of differential equations, to be studied with no *a priori* constraints. New scientific phenomena, new discoveries, may thus be generated. Understanding of the present knowledge may be deepened via the corresponding deductions.

Steve Smale, *What is chaos ?*

## Travaux présentés

Mes articles provenant de travaux effectués depuis ma thèse sont les suivants.

### Dynamique générique des équations paraboliques :

- [RJ1] P. Brunovský, R. Joly et G. Raugel, *Generic Kupka-Smale property for the parabolic equations*, manuscrit en cours de finition.
- [RJ2] R. Joly et G. Raugel, *A striking correspondence between the dynamics generated by the vector fields and by the scalar parabolic equations*, *Confluentes Mathematici* n°3 (2011), p. 471-493.
- [RJ3] R. Joly et G. Raugel, *Generic Morse-Smale property for the parabolic equation on the circle*, *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire* n°27 (2010), p. 1397-1440.
- [RJ4] R. Joly et G. Raugel, *Generic hyperbolicity of equilibria and periodic orbits of the parabolic equation on the circle*, *Transactions of the American Mathematical Society* n°362 (2010), p. 5189-5211.

### Étude de la propagation des fronts dans les équations dissipatives :

- [RJ5] G. Chapuisat et R. Joly, *Asymptotic profiles for a travelling front solution of a biological equation*, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* n°21 (2011), p. 2155-2177.
- [RJ6] Th. Gallay et R. Joly, *Global stability of travelling fronts for a damped wave equation with bistable nonlinearity*, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* n°42 (2009), p. 103-140.

### Stabilisation et contrôle de l'équation des ondes semilinéaire :

- [RJ7] R. Joly et C. Laurent, *A note on the global control of the semilinear wave equation*, manuscrit. ArXiv :1209.2605 [math.AP].
- [RJ8] R. Joly et C. Laurent, *Stabilization for the semilinear wave equation with geometric control condition*, *Analysis and PDE* n°6 (2013), p. 1089-1119.

### Divers :

- [RJ9] R. Joly, *Observation and inverse problems in coupled cell networks*, *Nonlinearity* n°25 (2012), p. 657-676.
- [RJ10] R. Joly, *How opening a hole affects the sound of a flute*, *Journal of Spectral Theory* n°1 (2011), p. 389-408.
- [RJ11] R. Joly, *Adaptation of the generic PDE's results to the notion of prevalence*, *Journal of Dynamics and Differential Equations* n°19 (2007), p. 967-983.



Les articles de recherche [RJ1, RJ3, RJ4] et l'article de revue [RJ2] sont le fruit d'une collaboration avec Geneviève Raugel qui s'est poursuivie après ma thèse. Ils font partie d'un vaste programme consistant à transposer les résultats de dynamique des équations différentielles, sur des variétés de dimension finie, au contexte des équations aux dérivées partielles, en particulier les équations paraboliques. Ces articles font l'objet du chapitre 3 de ce mémoire.

Les articles [RJ5] et [RJ6] concernent l'étude de la propagation de fronts dans certaines équations aux dérivées partielles. Ils ont été respectivement coécrits avec Guillemette Chapuisat et Thierry Gallay. Ils sont discutés dans le chapitre 5.

Les articles [RJ7] et [RJ8] sont issus d'une collaboration récente avec Camille Laurent. Ils ont pour but d'explorer l'interface entre théorie du contrôle et systèmes dynamiques de dimension infinie, en particulier en ce qui concerne l'équation des ondes, voir chapitre 4.

Les articles [RJ9] et [RJ10] sont un peu plus à la marge de mes thèmes de recherche principaux. Ils ne seront pas discutés plus en profondeur dans ce mémoire. On notera simplement que l'article [RJ9] est une application poussée des théorèmes de transversalité énoncés dans le chapitre 2 pour l'étude de la dynamique de réseaux d'équation différentielles ; et que l'article [RJ10] consiste à appliquer des techniques récentes de domaines minces multi-échelles pour décrire un modèle de flûte à bec.

L'article [RJ11] montre que la très grande majorité des résultats de généricité connus en EDP, sont aussi des résultats de prévalence. Une discussion sur ces notions de généricité et prévalence est faite au chapitre 2.

L'ensemble de ces articles fait suite à mes travaux de thèse publiés dans les références [80], [81] et [82].



# Chapitre 1 : Introduction

Le but de ce chapitre est de rappeler le vocabulaire utilisé pour l'étude des systèmes dynamiques. On présentera aussi les propriétés qui vont nous intéresser dans ce mémoire, ainsi que les résultats connus dans le cas des équations différentielles ordinaires (pour aller plus loin, nous renvoyons le lecteur aux références [104] et [126]).

## 1 Motivation

La modélisation mathématique de phénomènes physiques ou biologiques conduit le plus souvent à des équations d'évolution : équations différentielles ordinaires (EDO) ou équations aux dérivées partielles (EDP). La résolution de ces équations est en général impossible, c'est-à-dire que l'on ne peut pas exprimer les solutions à l'aide de formules explicites. L'étude du modèle mathématique consistera donc à comprendre le comportement qualitatif des solutions sans connaître leur expression exacte. Étant donnée une EDO ou une EDP, on s'intéressera en particulier aux problématiques suivantes :

- *La dynamique des solutions est-elle simple ou compliquée ? Les solutions ont-elles un comportement asymptotique que l'on peut préciser ?* Une dynamique simple est par exemple celle d'une corde de guitare : quelle que soit la façon dont on la pince, elle finit par revenir vers l'équilibre tout en vibrant à une fréquence donnée. De même, les solutions d'un système proie-prédateur à la Lotka-Volterra convergent typiquement vers des solutions périodiques, comportement simple que l'on peut retrouver dans la nature. Inversement, les équations de la météorologie présentent ce qu'on appelle du chaos : des solutions initialement très proches peuvent avoir des comportements très différents. Par conséquent, la dynamique de ces équations est très complexe et les prévisions météorologiques sont difficiles et souvent imprécises.
- *Les diverses approximations du modèle ont-elles changé la dynamique qualitative ?* Le principe d'une modélisation étant de négliger certains phénomènes pour obtenir une équation assez simple pour être étudiée, la dynamique de l'EDO ou de l'EDP obtenue n'est qu'une approximation de la dynamique du phénomène physique ou biologique initial. L'imprécision avec laquelle on connaît les différents paramètres du modèle (température, masse etc.) ou l'étude par une simulation numérique conduisent à d'autres approximations. De ce fait, il est important de savoir si la dynamique qualitative du modèle approché pourrait être complètement différente de celle du

phénomène réel. Par exemple, si on observe une solution périodique sur une simulation informatique, obtenue par une méthode d'approximation, la question est de savoir si cette solution existe aussi dans le vrai système, ou si c'est l'approximation numérique qui a fait apparaître un comportement qui n'existait pas à l'origine.

- *Peut-on garantir que le modèle suive un comportement qualitatif typique ?* La réponse aux questions précédentes est rarement absolue. En général, pour certaines valeurs des paramètres du modèle, la dynamique peut présenter des phénomènes exceptionnels : bifurcations, comportement qualitatif atypique, dégénérescence d'équilibres. . . La question est donc de savoir si ces situations sont suffisamment exceptionnelles pour ne pas être rencontrées en pratique. Comme il existe des incertitudes venant de la connaissances des paramètres et des diverses approximations, on ne cherchera pas à obtenir un critère explicite pour savoir si on est dans une situation exceptionnelle ou pas, mais plutôt à obtenir un résultat « presque toujours » vrai dans un sens plus ou moins probabiliste.

Les problématiques précédentes forment la base de l'étude des systèmes dynamiques initiée par Henri Poincaré. Depuis un siècle, les mathématiciens ont introduit diverses notions et théories pour mieux les comprendre. La suite de ce chapitre consistera à introduire une partie de ce formalisme mathématique et rappeler les résultats les plus classiques.

## 2 Vocabulaire de base pour les systèmes dynamiques

Dans ce mémoire, par « système dynamique » on entendra un semi-flot continu et on supposera toujours qu'il est injectif.

**Définition 1.1.** *Soit  $r$  un entier positif ou nul. Soit  $X$  une variété de Banach de classe  $C^r$ . On appelle  $C^r$ -**semi-groupe** (ou  $C^r$ -**semi-flot**, ou **système dynamique de classe  $C^r$** ) une famille  $(S(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  d'applications de  $X$  dans  $X$  telle que :*

*i)  $S(0) = Id$ ,*

*ii) pour tous temps positifs  $t$  et  $s$ ,  $S(t)S(s) = S(t+s)$ ,*

*iii) l'application  $S : (t, U) \mapsto S(t)U$  est de classe  $C^0(\mathbb{R}_+ \times X, X)$  et toutes ses dérivées de Fréchet en  $U$  jusqu'à l'ordre  $r$  sont de classe  $C^0(\mathbb{R}_+ \times TX, TX)$ .*

*On dit que  $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$  est un **groupe** de classe  $C^r$  si les trois propriétés précédentes sont vraies pour  $t$  et  $s$  dans  $\mathbb{R}$ .*

*On dit que  $(S(t))$  est **injectif** si la fonction  $S(t)$  est injective pour tout  $t$ .*

On notera que l'on peut définir les **systèmes dynamiques discrets** en remplaçant  $t \in \mathbb{R}$  par  $n \in \mathbb{Z}$  dans la définition précédente.

Une **trajectoire** du système dynamique  $S(t)$ , définie sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ , est une fonction  $U \in C^0(I, X)$  telle que pour tous temps  $t \in I$  et  $t' \geq 0$  vérifiant  $t + t' \in I$ ,  $U(t + t') = S(t')U(t)$ . Si  $I = \mathbb{R}$ , on parle de trajectoire complète. Pour tout point  $U_0 \in X$ ,

on définit la trajectoire positive de  $U_0$  comme la trajectoire  $U(t)$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  telle que  $U(0) = U_0$ . La trajectoire négative est la trajectoire  $U(t)$  définie sur le plus grand intervalle  $I \subset \mathbb{R}_-$  telle que  $U(0) = U_0$ . Un point admet toujours une unique trajectoire positive, mais l'existence d'une trajectoire négative non triviale n'est pas garantie. On notera que l'hypothèse que  $S(t)$  est injectif se traduit par ce qu'on appelle l'**unicité rétrograde** : il ne peut y avoir deux trajectoires négatives différentes pour un même point  $U_0$ .

### Définition 1.2.

L'**ensemble  $\omega$ -limite** d'un point  $U_0$  est l'ensemble  $\omega(U_0)$  des points  $x \in X$  tels qu'il existe une suite de temps  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissant vers  $+\infty$  telle que  $S(t_n)U_0$  converge vers  $x$ .

L'**ensemble  $\alpha$ -limite** d'un point  $U_0$  est l'ensemble  $\alpha(U_0)$  des points  $x \in X$  tels qu'il existe une trajectoire négative  $(U(t))_{t \leq 0}$  avec  $U(0) = U_0$  et une suite de temps  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissant vers  $-\infty$  telle que  $U(t_n)$  converge vers  $x$ .

On notera qu'un ensemble  $\alpha$ - ou  $\omega$ -limite est invariant par le flot du système dynamique, aussi bien positivement que négativement. Autrement dit, ces ensembles se composent de trajectoires complètes.

Les différentes trajectoires particulières d'un système dynamique sont les suivantes.

### Définition 1.3.

Un **point d'équilibre** est un élément  $e \in X$  tel que pour tout  $t$  positif,  $S(t)e = e$ .

Une **trajectoire périodique** de plus petite période  $T$  est une trajectoire complète  $p(t)$  vérifiant  $p(t + T) = p(t)$  pour tout  $t \geq 0$ , et telle que cette propriété ne soit pas vérifiée pour un temps  $T' \in ]0, T[$ . Une **orbite périodique** de plus petite période  $T$  est un ensemble  $\Gamma = \{p(t), t \in \mathbb{R}\}$  où  $p(t)$  est une trajectoire périodique de plus petite période  $T$ .

Une trajectoire **homocline** est une trajectoire complète  $U(t)$  telle que les ensembles  $\alpha$ - et  $\omega$ -limite de  $U(0)$  sont égaux et sont restreints à un seul point d'équilibre ou à une seule orbite périodique.

Une trajectoire **hétérocline** est une trajectoire complète  $U(t)$  telle que les ensembles  $\alpha$ - et  $\omega$ -limite de  $U(0)$  sont distincts et sont chacun restreint à un seul point d'équilibre ou à une seule orbite périodique.

Pour étudier la dynamique près d'une trajectoire particulière, on linéarise le système dynamique près de celle-ci. Prenons un point d'équilibre  $e$  et considérons pour n'importe quel  $T > 0$  l'application  $S(T)$ . On a  $S(T)e = e$  puisque  $e$  est un équilibre. Si on suppose que  $S(t)$  est un système dynamique de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors on peut considérer la différentielle  $DS(T)(e)$  au point  $e$  et espérer que le comportement du système dynamique consistant à itérer  $DS(T)(e)$  est très proche de celui de  $S(T)$  près de  $e$ .

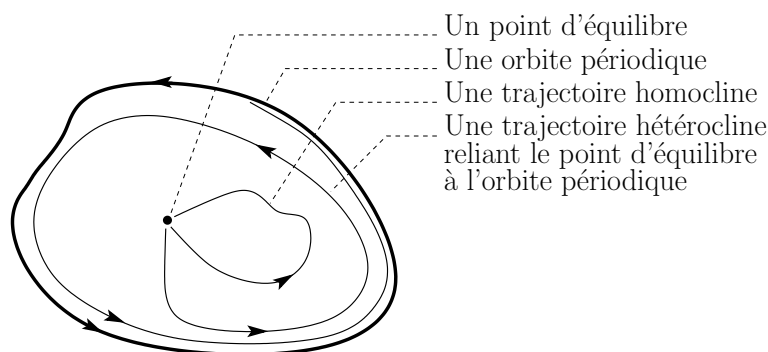


FIGURE 1.1 – Des exemples de trajectoires particulières

**Théorème 1.4. Variétés locales stable et instable d'un point d'équilibre**

Soit  $S(t)$  un semi-flot de classe  $C^1$  et  $e$  un point d'équilibre de  $S(t)$ . Si  $e$  est **hyperbolique**, c'est-à-dire si le spectre de  $DS(T)(e)$  n'intersecte pas le cercle unité de  $\mathbb{C}$  pour un quelconque  $T > 0$ , alors il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $e$  tel que les ensembles

$$W_{loc}^s(e, \mathcal{U}) = \{x \in X, \forall t > 0, S(t)x \in \mathcal{U}\}$$

$$W_{loc}^u(e, \mathcal{U}) = \{x \in X, \text{ la trajectoire négative de } x \text{ est définie pour tout } t < 0 \\ \text{et est contenue dans } \mathcal{U}\}$$

sont des variétés de classe  $C^1$  appelées respectivement **variétés locales stable et instable** de  $e$ . Au point d'équilibre  $e$ , les espaces tangents  $T_e W_{loc}^s(e, \mathcal{U})$  et  $T_e W_{loc}^u(e, \mathcal{U})$  sont les espaces stable et instable de  $DS(T)(e)$ , c'est-à-dire les espaces  $X^s(e)$  et  $X^u(e)$  correspondant respectivement au spectre de module strictement plus petit que 1 et au spectre de module strictement plus grand que 1. En outre, toute trajectoire contenue dans  $W_{loc}^s(e, \mathcal{U})$  converge exponentiellement vite vers  $e$  quand  $t \rightarrow +\infty$  et toute trajectoire négative contenue dans  $W_{loc}^u(e, \mathcal{U})$  converge exponentiellement vite vers  $e$  quand  $t \rightarrow -\infty$ .

On peut définir de même l'hyperbolicité d'une orbite périodique et ses variétés locales stable et instable.

**Théorème 1.5. Variétés locales stable et instable d'une orbite périodique**

Soit  $S(t)$  un semi-flot de classe  $C^1$  et  $\Gamma$  une orbite périodique de période  $T$  associée à une trajectoire périodique  $p(t)$ . Si  $p$  est **hyperbolique**, c'est-à-dire  $DS(T)(p(0))$  n'a que 1 comme spectre de module 1 et que 1 est une valeur propre simple et isolée, alors il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $\Gamma = \{p(t), t \in \mathbb{R}\}$  tel que les ensembles

$$W_{loc}^s(\Gamma, \mathcal{U}) = \{x \in X, \forall t > 0, S(t)x \in \mathcal{U}\}$$

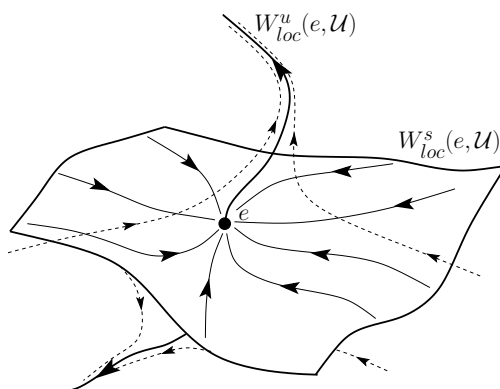


FIGURE 1.2 – Un point d'équilibre  $e$  et ses variétés locales stable et instable. En pointillés, le comportement typique des trajectoires près du point d'équilibre : en temps grand, elles s'approchent de la variété instable et s'éloignent de la variété stable.

$$W_{loc}^u(\Gamma, \mathcal{U}) = \{x \in X, \text{ la trajectoire négative de } x \text{ est définie pour tout } t < 0 \\ \text{et est contenue dans } \mathcal{U}\}$$

sont des variétés de classe  $\mathcal{C}^1$  appelées respectivement **variétés locales stable et instable** de  $\Gamma$ . Au point  $p(0)$ , les espaces tangents  $T_{p(0)}W_{loc}^s(\Gamma, \mathcal{U})$  et  $T_{p(0)}W_{loc}^u(\Gamma, \mathcal{U})$  sont les espaces centraux stable et instable de  $DS(T)(p(0))$ , c'est-à-dire les espaces  $X^s(p(0))$  et  $X^u(p(0))$  correspondant respectivement au spectre de module plus petit ou égal à 1 et au spectre de module plus grand ou égal à 1.

En outre, toute trajectoire contenue dans  $W_{loc}^s(\Gamma, \mathcal{U})$  converge vers  $\Gamma$  quand  $t \rightarrow +\infty$  et toute trajectoire négative contenue dans  $W_{loc}^u(\Gamma, \mathcal{U})$  converge vers  $\Gamma$  quand  $t \rightarrow -\infty$ .

On peut aussi considérer les variétés stable et instable de façon plus globale.

**Définition 1.6.** Soit  $S(t)$  un système dynamique de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\mathcal{C}$  un élément critique hyperbolique de  $S(t)$ , c'est-à-dire soit un point d'équilibre hyperbolique, soit une orbite périodique hyperbolique. Les **variétés (globales) stable et instable** de  $\mathcal{C}$  sont les ensembles

$$W^s(\mathcal{C}) = \{x \in X, \omega(x) = \mathcal{C}\} \quad \text{et} \quad W^u(\mathcal{C}) = \{x \in X, \alpha(x) = \mathcal{C}\}.$$

Le terme « variété » peut être qualifié d'abus de langage (et si l'abus est trop manifeste, on parle juste d'ensembles stables et instables). En effet, il faut d'abord que  $S(t)$  et  $DS(t)$  soient des semi-flots injectifs, pour espérer que  $W^u(\mathcal{C})$  hérite d'une structure de variété par la caractérisation  $W^u(\mathcal{C}) = \cup_{t \geq 0} S(t)W_{loc}^u(\mathcal{C}, \mathcal{U})$ . C'est encore plus délicat pour  $W^s(\mathcal{C})$  si  $S(t)$  n'est pas un groupe ou n'a pas de bonnes propriétés pour ses trajectoires négatives. En outre,  $W^u(\mathcal{C})$  et  $W^s(\mathcal{C})$  ne sont pas forcément des sous-variétés de  $X$  car elles peuvent

se replier et s'accumuler sur elles-même, par exemple dans le cas d'homoclines transverses (voir figure 1.3). On trouvera dans [RJ1] la construction des structures de variétés pour  $W^u(\mathcal{C})$  et  $W^s(\mathcal{C})$  dans le cadre d'une EDP parabolique qui n'engendre pas un groupe  $S(t)$ .

Pour conclure cette partie, nous allons définir la transversalité des variétés stables et instables de deux éléments critiques hyperboliques  $\mathcal{C}_-$  et  $\mathcal{C}_+$  (éventuellement égaux). Deux sous-variétés différentiables  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  d'une variété  $X$  sont **transverses** si en tout point d'intersection  $x \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ ,  $T_x\mathcal{M}$  et  $T_x\mathcal{N}$  sont des sous-espaces fermés de  $T_xX$  qui admettent des supplémentaires fermés et si on a  $T_x\mathcal{M} + T_x\mathcal{N} = T_xX$ , c'est-à-dire que la somme des espaces tangents remplit tout l'espace. Dans les cas où on a pu bien définir la structure de variétés pour les ensembles stables et instables, on peut introduire la notion de trajectoires **hétéroclines et homoclines transverses** qui sont les trajectoires reliant  $\mathcal{C}_-$  à  $\mathcal{C}_+$ , telles que  $W^u(\mathcal{C}_-)$  et  $W^s(\mathcal{C}_+)$  se coupent transversalement le long de ces trajectoires.

La transversalité joue un rôle important dans l'étude de la dynamique et sa stabilité. Par exemple, une orbite homocline transverse implique la présence d'une dynamique chaotique (voir partie 5). On pourra consulter la figure 1.3 et se référer à Poincaré :

*Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini [...], chacune de ces courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier elle-même d'une manière très complexe pour venir couper une infinité de fois toutes les mailles du réseau. On sera frappé par la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication [...] de tous les problèmes de la dynamique [...].*

### 3 Dissipation, attracteurs et systèmes de type gradient

Dans ce mémoire, les systèmes dynamiques qui vont nous intéresser sont les systèmes dynamiques possédant un attracteur global compact. Les caractéristiques clefs de tels systèmes dynamiques sont :

- ils sont **dissipatifs**, c'est-à-dire qu'il existe un borné  $\mathcal{B}$  de  $X$  tel que pour tout borné  $B \subset X$ , il existe un temps  $T(B) \geq 0$  tel que  $S(t)B \subset \mathcal{B}$  pour tout  $t \geq T$ . Physiquement, on peut dire qu'un phénomène d'amortissement dissipe les énergies trop grandes et que toute trajectoire finit dans une boule  $\mathcal{B}$  d'énergie relativement petite. On dira que  $S(t)$  est simplement **ponctuellement dissipatif** si la propriété précédente n'est requise que si  $B$  est un singleton.
- ils sont **asymptotiquement compacts**, c'est-à-dire que pour tout borné  $B \subset X$  tel que l'orbite  $\cup_{t \geq t_0} S(t)B$  est bornée pour un certain  $t_0$ , pour toutes suites de points  $(x_n) \subset B$  et de temps  $(t_n) \rightarrow +\infty$ , on peut extraire une sous-suite convergente de  $S(t_n)x_n$ . Cette notion n'est non-triviale qu'en dimension infinie. On peut la voir



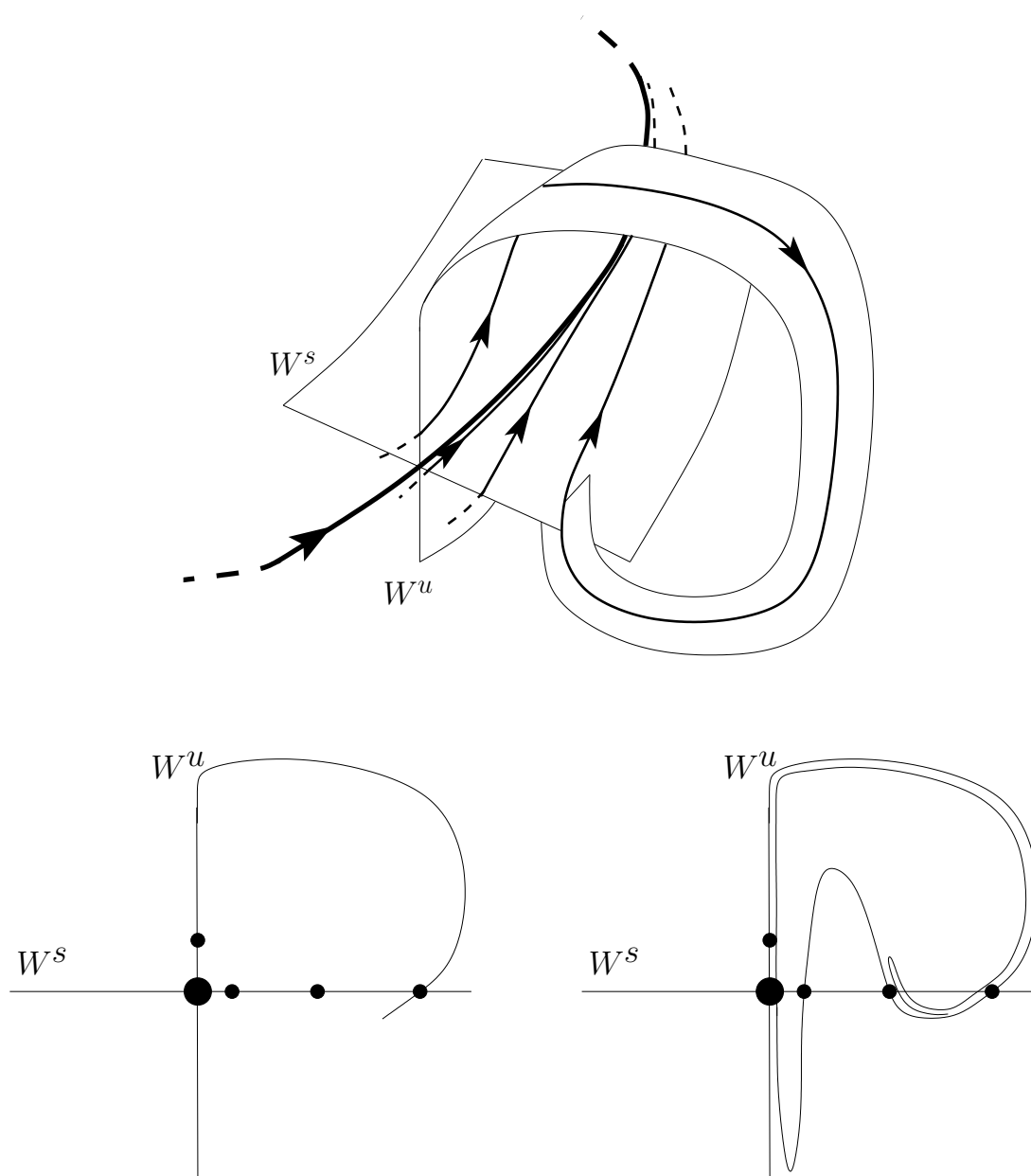


FIGURE 1.3 – *En haut, un aperçu local d'une orbite périodique et d'une homocline à celle-ci. Les variétés stables et instables sont en partie représentées près de l'orbite homocline pour faire apparaître leur intersection qui est transverse. En bas à gauche, une coupe du schéma du haut suivant le plan d'entrée. On voit la variété instable couper transversalement la variété stable. A droite, le dessin de cette variété instable est prolongé : la variété continue de s'étaler suivant la direction instable et commence à s'accumuler sur elle-même. Si on prolonge encore le dessin, on comprend pourquoi la dynamique autour de cette orbite homocline est très complexe et chaotique.*

comme un phénomène de dissipation sur les modes fortement oscillants de la solution : les hautes fréquences de la solution  $S(t)x$  sont suffisamment amorties pour que seul un nombre fini de modes soient vraiment déterminants et donc que  $S(t)x$  est asymptotiquement caractérisé par un ensemble compact de paramètres.

Ces propriétés impliquent que  $S(t)$  possède un **attracteur global compact**, c'est-à-dire un compact  $\mathcal{A}$  qui est invariant par le flot ( $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ ) et tel que pour tout borné  $B \subset X$  et tout voisinage  $\mathcal{N}$  de  $\mathcal{A}$ , il existe un temps  $t > 0$  tel que  $S(t)B \subset \mathcal{N}$ , voir [64] ou [118]. En particulier, on notera qu'alors tout point possède un ensemble  $\omega$ -limite non-trivial.

**Théorème 1.7.** *Soit  $S(t)$  un  $C^0$ -semi-flot  $S(t)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $S(t)$  est dissipatif et asymptotiquement compact
- (ii)  $S(t)$  est ponctuellement dissipatif, asymptotiquement compact et pour tout borné  $B$ , l'orbite  $\cup_{t \geq t_0} S(t)B$  est bornée pour un certain  $t_0$ .
- (iii)  $S(t)$  admet un attracteur global compact  $\mathcal{A}$ .

De plus, si  $S(t)$  est injectif, alors  $S(t)$  restreint à  $\mathcal{A}$  est un  $C^0$ -groupe et l'attracteur global  $\mathcal{A}$  est égal à l'ensemble des orbites  $\cup_{t \in \mathbb{R}} S(t)x$  globales et bornées. En particulier,  $\mathcal{A}$  contient les points d'équilibre, les orbites périodiques, les homoclines et hétéroclines ainsi que tous les ensembles  $\alpha$ - et  $\omega$ -limites.

Dans le cas où l'amortissement d'un système physique est important, on s'attend à ce que, quelle que soit l'excitation initialement fournie, le système revienne au repos, c'est-à-dire que toute trajectoire converge vers un point d'équilibre. Le concept mathématique associé à ce phénomène est celui de système de type gradient.

**Définition 1.8.** *Un système dynamique  $S(t)$  est dit de type gradient s'il existe une fonction  $\Phi \in C^0(X, \mathbb{R})$ , appelée **fonction de Lyapounov**, telle que :*

- (i) pour tout  $x \in X$ ,  $t \mapsto \Phi(S(t)x)$  est décroissante,
- (ii) si un point  $x \in X$  est tel que  $\Phi(S(t)x)$  est constant pour tout  $t \geq 0$ , alors  $x$  est un équilibre de  $S(t)$ .

Le point clef de la dynamique de type gradient est le principe d'invariance de LaSalle.

**Théorème 1.9.** *Si  $S(t)$  est un système de type gradient, alors tous ses ensembles  $\alpha$ - ou  $\omega$ -limite non vides sont des ensembles connexes de points d'équilibre. En particulier, si tous les points d'équilibre de  $S(t)$  sont isolés, alors tout ensemble  $\alpha$ - ou  $\omega$ -limite est soit vide, soit un unique point d'équilibre.*

On notera en particulier qu'un système de type gradient ne peut avoir d'orbites périodiques. La structure de l'attracteur devient très particulière.

**Théorème 1.10.** *Soit  $S(t)$  un système dynamique de type gradient. Alors  $S(t)$  possède un attracteur global compact  $\mathcal{A}$  si et seulement si  $S(t)$  est asymptotiquement compact, si l'ensemble des points d'équilibre de  $S(t)$  est borné et si l'orbite  $\cup_{t \geq t_0} S(t)B$  de tout borné  $B$  est bornée, pour un certain  $t_0 \geq 0$ . En outre, si tous les points d'équilibres de  $S(t)$  sont hyperboliques, alors ils sont en nombre fini et  $\mathcal{A}$  est exactement l'union de leurs variétés instables.*

## 4 Stabilité et propriétés de Kupka-Smale et Morse-Smale

Comme discuté au début de ce chapitre, une des questions importantes dans l'étude des systèmes dynamiques est de savoir si le comportement qualitatif est stable par petite perturbation des paramètres. Soit  $S_\lambda(t)$  une famille de systèmes dépendant continûment d'un paramètre  $\lambda$  (une température, des coefficients du système, un taux de précision dans une approximation numérique...). Supposons, par exemple, que la dynamique de  $S_{\lambda_0}(t)$  comprenne deux points d'équilibres  $e_-(\lambda_0)$  et  $e_+(\lambda_0)$  ainsi qu'une orbite hétérocline les joignant. On aimerait pouvoir s'assurer que pour  $\lambda$  suffisamment proche de  $\lambda_0$ , la dynamique de  $S_\lambda(t)$  comprend toujours deux points d'équilibres  $e_-(\lambda)$  et  $e_+(\lambda)$  et une orbite hétérocline les joignant, le tout variant continûment en fonction de  $\lambda$ . La bonne propriété pour ce faire est de supposer que  $S_{\lambda_0}(t)$  satisfait la propriété de Kupka-Smale.

**Définition 1.11.** *Un système dynamique  $S(t)$  satisfait la propriété de **Kupka-Smale** si :*

- *tous ses points d'équilibres et toutes ses orbites périodiques sont hyperboliques,*
- *les variétés stables et instables des points d'équilibres et des orbites périodiques se coupent transversalement.*

La condition d'hyperbolicité est naturelle pour pouvoir appliquer un théorème de fonctions implicites afin de garantir que les éléments critiques varient continûment. Sinon, une bifurcation pourrait scinder un point d'équilibre en trois autres, ou doubler une orbite périodique (voir figures 1.4 et 1.5). De même, si les variétés stables et instables ne se coupent pas transversalement, on pourrait briser les connexions hétéroclines ou homoclines puisque celle-ci sont exactement les intersections de ces variétés (voir figure 1.6).

On peut donc dire que la propriété de Kupka-Smale garantit la stabilité locale de la dynamique : si  $S_{\lambda_0}(t)$  vérifie la propriété de Kupka-Smale, alors tout ensemble fini de points d'équilibre, d'orbites périodiques, homoclines ou hétérocline, variera continûment pour  $\lambda$  évoluant proche de  $\lambda_0$ . Par contre, elle ne garantit pas la stabilité globale de la dynamique, selon le concept introduit par Andronov et Pontryagin dans [3].

**Définition 1.12.** *Un système dynamique  $S_{\lambda_0}(t)$ , possédant un attracteur global compact  $\mathcal{A}_{\lambda_0}$ , est **structurellement stable** (ou **globalement stable**) s'il existe un voisinage  $\mathcal{N}$  de  $\lambda_0$  tel que pour tout  $\lambda \in \mathcal{N}$ , le système dynamique  $S_\lambda(t)$  possède un attracteur global compact  $\mathcal{A}_\lambda$  et il existe un homéomorphisme  $h : \mathcal{A}_{\lambda_0} \rightarrow \mathcal{A}_\lambda$  qui envoie les orbites de  $S_{\lambda_0}(t)|_{\mathcal{A}_{\lambda_0}}$  sur celles de  $S_\lambda(t)|_{\mathcal{A}_\lambda}$  en conservant le sens du temps.*

Remarquons qu'on peut penser  $h$  comme une conjugaison entre  $S_{\lambda_0}(t)$  et  $S_\lambda(t)$ , ce qui est le cas pour des systèmes dynamiques discrets ( $t \in \mathbb{Z}$ ), mais pas pour des systèmes dynamiques continus (par exemple, il faut permettre à une orbite périodique de changer légèrement de période quand  $\lambda$  s'écarte de  $\lambda_0$ ).

Pour obtenir des systèmes dynamiques globalement stables, Smale [133] introduisit la propriété de Morse-Smale.

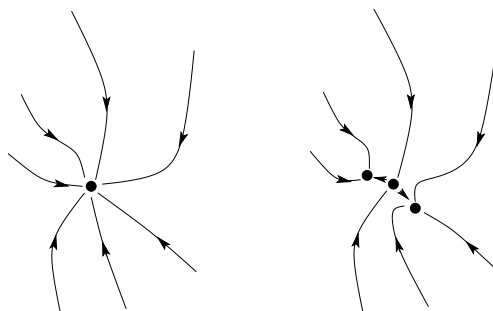


FIGURE 1.4 – Une bifurcation de type « fourche ». A gauche, le système dynamique  $S_{\lambda_0}(t)$  n'a qu'un équilibre qui est stable. A droite, un système dynamique  $S_{\lambda}(t)$  très proche, mais qui a trois équilibres : deux stables et un instable.

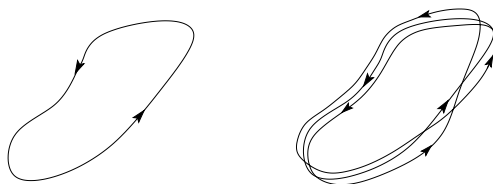


FIGURE 1.5 – Une bifurcation de type « doublement de période ». A gauche, le système dynamique  $S_{\lambda_0}(t)$  n'a qu'une orbite périodique. A droite, le système dynamique  $S_{\lambda}(t)$  a en plus une orbite périodique de période à peu près double. Une coupe transversale aux orbites périodiques ferait apparaître un dessin du type bifurcation fourche.

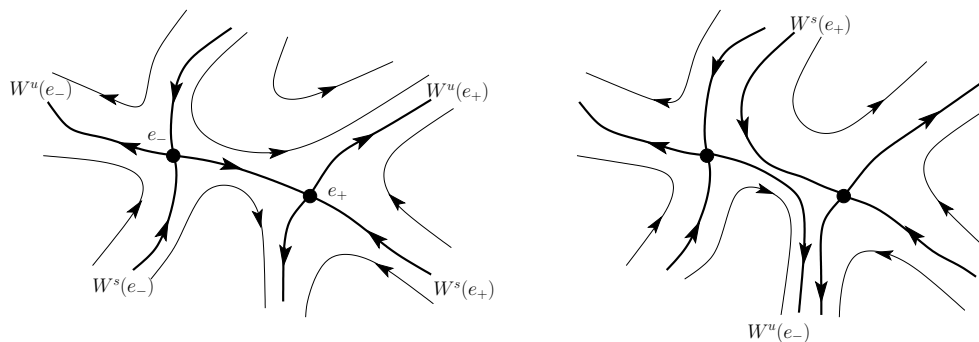


FIGURE 1.6 – Une bifurcation brisant une homocline. A gauche, les variétés  $W^u(e_-)$  et  $W^s(e_+)$  s'intersectent et forment une hétérocline reliant  $e_-$  à  $e_+$ . Cette intersection n'étant pas transverse, il est possible de bouger légèrement le champ de vecteur afin de briser cette hétérocline : à droite les variétés  $W^u(e_-)$  et  $W^s(e_+)$  ne se rencontrent plus.

**Définition 1.13.** *Un système dynamique  $S(t)$  satisfait la propriété de Morse-Smale si :*

- *il n'a qu'un nombre fini de points d'équilibres et d'orbites périodiques,*
- *tous ses points d'équilibres et toutes ses orbites périodiques sont hyperboliques,*
- *les variétés stables et instables des points d'équilibres et des orbites périodiques se coupent transversalement,*
- *il n'y a pas d'autres points non-errant, c'est-à-dire que pour tout point  $x$  qui n'est ni un équilibre, ni un point périodique, tout voisinage  $\mathcal{N}$  de  $x$  vérifie  $S(t)\mathcal{N} \cap \mathcal{N} = \emptyset$  pour tout  $t$  suffisamment grand.*

Un exemple de points non-errants qui ne sont pas des équilibres ou des orbites périodiques est donné dans la figure 1.7.

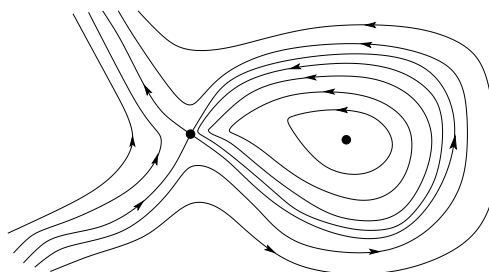


FIGURE 1.7 – *Un exemple de points non-errants qui ne sont ni des équilibres, ni des points périodiques : les points d'une orbite homocline sur laquelle s'accumulent des orbites périodiques. Poussé par le flot, tout voisinage d'un point de l'homocline revient s'intersecter une infinité de fois.*

Qualitativement, une dynamique de type Kupka-Smale peut être très complexe (par exemple chaotique). On a toutefois une certaine structure dynamique intéressante. Ainsi, l'hyperbolicité des équilibres et trajectoires périodiques permet d'appliquer le  $\lambda$ -lemma (voir [104]). En ajoutant la transversalité des variétés stables et instables, on obtient le *cascading lemma* : si une hétérocline relie deux éléments critiques  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  et si  $\mathcal{C}_2$  est de même relié à  $\mathcal{C}_3$ , alors il existe une hétérocline (ou homocline) reliant  $\mathcal{C}_1$  à  $\mathcal{C}_3$ . Si par exemple  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_3$ , la chaîne d'hétéroclines transverses implique la présence d'une homocline transverse et, dans ce cas, les travaux de Birkhoff et le « fer à cheval » de Smale montrent l'existence d'une dynamique chaotique conjuguée à celle du shift, voir [20] et [136].

Une dynamique de type Morse-Smale est beaucoup plus simple. Elle comprend un attracteur dans lequel il n'y a qu'un nombre fini de points d'équilibre et d'orbites périodiques ainsi que des hétéroclines les connectant (voir figure 1.8). La dynamique du shift comprenant une infinité d'orbites périodiques, la discussion précédente montre qu'un système de type Morse-Smale ne peut avoir d'homocline ou de chaîne d'hétéroclines. Un tel système ne présentera jamais de comportement chaotique.

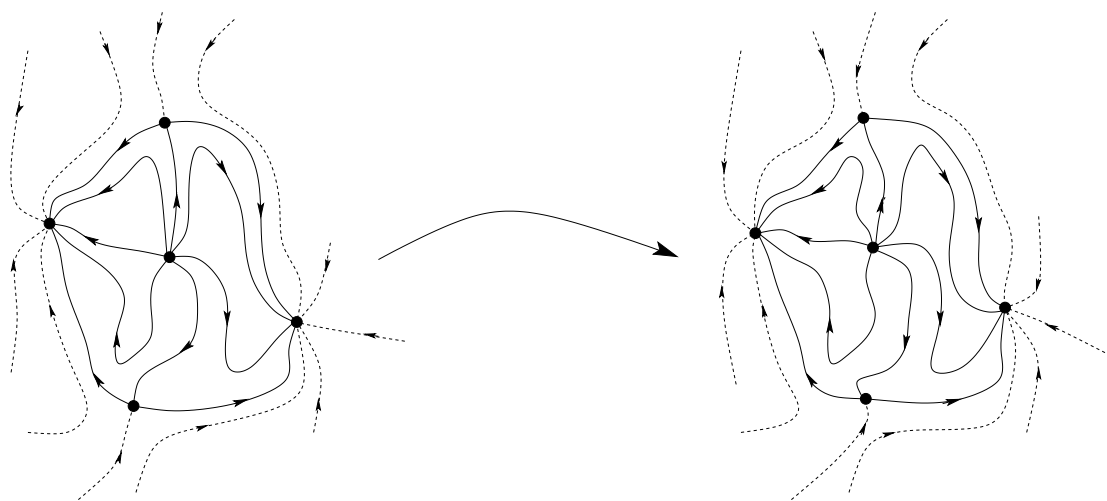


FIGURE 1.8 – Un exemple de système qui vérifie la propriété de Morse-Smale et dont la dynamique est qualitativement inchangée après une petite perturbation. On notera qu’il s’agit d’un exemple typique des dynamiques de type Chafee-Infante qu’on trouve dans les EDP paraboliques sur le segment (voir chapitre 3).

## 5 Un historique concernant la dimension finie

Ce paragraphe concerne la dynamique des flots des équations différentielles ordinaires. Plus précisément, soit  $d \geq 1$ ,  $X = \mathbb{R}^d$  et  $f$  un champ de vecteur sur  $\mathbb{R}^d$  de classe  $\mathcal{C}^1$  vérifiant

$$\exists R \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \notin B(0, R), \quad \langle x | f(x) \rangle < 0. \quad (1.1)$$

On considère le système dynamique  $S_f(t)$  (ou plus simplement noté  $S(t)$ ) défini sur  $X$  par

$$S_f(t)x_0 = x(t) \quad \text{où } x \text{ est solution de } \begin{cases} \dot{x}(s) = f(x(s)) & s > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Comme le champ  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , les solutions de l’équation différentielle (1.2) sont définies localement. L’hypothèse (1.1) dit que le champ est rentrant en dehors d’une large boule, et implique que ces solutions existent en fait globalement. En outre,  $S_f(t)$  est dissipatif (on peut prendre  $\mathcal{B} = B(0, R)$ ) et  $S_f(t)$  admet un attracteur global compact  $\mathcal{A}$ . Le but est de comprendre le comportement qualitatif de  $S_f(t)$ , au moins génériquement, c’est-à-dire pour presque tout  $f \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R}^d)$  (voir le chapitre 2 concernant la notion de généricité). L’idée que l’on peut obtenir des informations sur ce comportement dynamique, sans pour autant savoir calculer exactement les solutions de (1.2), remonte aux travaux pionniers de Sturm, Poincaré, Lyapounov ou Birkhoff (voir par exemple [109] et [20]).

La question de la stabilité globale de la dynamique de (1.2) a été abordée en premier par Andronov et Pontryagin dans les années 30, voir [3]. Smale introduisit dans [133] la

notion de systèmes dynamiques de type Morse-Smale et conjectura qu'il s'agissait d'une propriété générique impliquant la stabilité structurelle... avant de découvrir son « fer à cheval » dans les orbites homoclines transverses, qui montre que la généricité de la propriété de Morse-Smale est fautive en général (voir [136], le phénomène avait été en fait déjà découvert par Poincaré puis Birkhoff auparavant). Peixoto montra toutefois dans [107] que la propriété de Morse-Smale est générique pour les équations différentielles (1.2) en dimension  $d = 2$ . En dimension  $d \geq 3$ , Kupka et Smale montrèrent simultanément ([88] et [134]) que la propriété de Kupka-Smale est générique (voir aussi la preuve simplifiée par Peixoto dans [108]). Le fait que la propriété de Morse-Smale implique la stabilité structurelle est finalement venue plusieurs années après dans [103] et [105]. Les exemples d'Anosov [6] montrèrent qu'un système dynamique peut être structurellement stable sans être de type Morse-Smale. Enfin, l'exemple de [62] montre que, non seulement les systèmes de type Morse-Smale, mais même les systèmes structurellement stables ne sont pas denses dans les systèmes (1.2) en dimension  $d = 3$ .

## 6 Le passage à la dimension infinie

Dans ce mémoire, nous allons nous intéresser, non pas à des équations différentielles ordinaires, mais à des équations aux dérivées partielles. Dans un système dynamique engendré par une EDO comme (1.2), l'état du système appartient à un espace de dimension finie ( $\mathbb{R}^d$  dans (1.2), mais ce peut être aussi une sphère, un tore... ). La solution d'une EDP peut, elle, être vue comme une fonction d'une variable spatiale qui évolue au cours du temps (c'est le point de vue des semi-groupes, dont on trouvera la théorie dans [106]). Autrement dit, le système dynamique  $S(t)$  engendré par une équation aux dérivées partielles a pour espace des états un espace  $X$  de fonctions de l'espace, typiquement  $X = L^2(\Omega)$ ,  $H_0^1(\Omega)$  ou un espace de Sobolev plus compliqué, où  $\Omega$  est un domaine spatial (plus rarement, l'état est une fonction qui dépend d'autre chose que l'espace, par exemple l'âge ou un trait génétique d'une espèce animale). Il est d'usage d'abandonner la notation  $x(t)$ , pour noter  $u(t)$  la trajectoire d'un tel système dynamique (on garde la lettre  $x$  pour la variable d'espace). Une trajectoire du système dynamique  $S(t)$  sera donc une fonction  $u(t)$  évoluant dans un espace de fonctions dépendant de  $x$ , et on pourra noter  $u(x, t)$  la fonction totale (en suivant la tradition pour l'ordre des variables, bien que  $u(x, t) = u(t)(x)$ ).

La conséquence la plus visible du passage EDO vers EDP est donc que l'espace  $X$  des états est maintenant de dimension infinie. En particulier, on perd la compacité des bornés. Dans tout ce mémoire, on considèrera des équations aux dérivées partielles dissipatives, la dissipation ayant lieu de deux points de vue :

- l'EDP dissipe les hautes énergies et toute trajectoire finit avec une énergie plus petite qu'un certain palier ( $S(t)$  est un système dynamique dissipatif),
- l'EDP dissipe les hautes fréquences et seul un nombre fini de modes de Fourier finissent par être réellement déterminants ( $S(t)$  est un système dynamique asymptotiquement déterminant).

tiquement compact).

Cette dissipation se traduira ici par l'existence d'un attracteur global compact  $\mathcal{A}$  qui contient toute la dynamique qui nous intéressera par la suite. Remarquons que cette idée que seul un nombre fini de fréquences deviennent importantes quand  $t \rightarrow \infty$  renvoie au concept de « nombre fini de modes déterminants » de la littérature (voir [68] par exemple). Au final, les principales difficultés qui vont apparaître lors du passage EDO  $\rightarrow$  EDP sont les suivantes.

- La perte de compacité est en partie compensée par la compacité asymptotique, le fait de ne regarder que la dynamique sur l'attracteur compact  $\mathcal{A}$  et des techniques comme les opérateurs de Fredholm (voir chapitre suivant). Toutefois,  $\mathcal{A}$  n'est pas en général une sous-variété de dimension finie et on ne peut se ramener au cas des équations différentielles. Par exemple, la stabilité structurelle d'un système dynamique de type Morse-Smale, sur un espace  $X$  de dimension infinie, est plus difficile à obtenir (voir [66]).
- La définition d'une solution est plus complexe dans le cas des EDP. En particulier, certaines trajectoires d'EDP ne sont pas définies pour des temps négatifs : même si on garde la propriété d'unicité rétrograde, il n'y a pas forcément de trajectoire rétrograde (ainsi, la définition d'une variété stable globale n'est pas triviale). De même, si la trajectoire  $u(t)$  de l'EDP est continue en temps, elle n'est pas forcément de classe  $\mathcal{C}^1$  dans  $X$  et cela peut poser problème (ainsi, en général, l'application de premier retour de Poincaré pour une orbite périodique n'est plus de classe  $\mathcal{C}^1$  et on ne peut définir le spectre d'une orbite périodique en la différentiant).
- Une EDP n'est pas n'importe quel système dynamique sur  $X$ . De notre point de vue, il s'agira du problème le plus important. En effet, si l'on souhaite montrer qu'une propriété est générique dans une certaine classe d'EDPs, il faut montrer qu'on peut toujours perturber un système afin que cette propriété soit vérifiée dans le nouveau système. Le problème est que l'on ne peut pas prendre n'importe quelle perturbation puisqu'on doit rester dans la classe d'EDPs choisie. Ainsi, il sera primordial de comprendre, en fonction de l'EDP et du paramètre choisis, quel contrôle on peut avoir sur le système dynamique  $S(t)$ . D'un autre côté, le fait que le système dynamique n'est pas quelconque nous aidera fortement puisque l'EDP peut avoir des propriétés très particulières, telles que le principe de comparaison des trajectoires pour les équations de type réaction-diffusion. Concernant la dynamique des EDOs, des études ont aussi été faites dans le cadre de classes particulières, où toutes les perturbations n'étaient pas admises, comme les flots conservatifs ou hamiltoniens ([125] ou [120] par exemple), les flots géodésiques ([119]) ou les flots engendrés par des champs polynomiaux ([123]).

On trouvera des introductions aux systèmes dynamiques engendrés par des EDPs dans les références [64], [66], [74], [118], [38] et [126].



# Chapitre 2 : La généricité et les notions de « presque toujours »

Ce chapitre est en grande partie une version allégée d'un projet de chapitre pour le livre [67]. Il contient une discussion sur les notions de « presque toujours » qui fait suite à l'article [RJ11]. On notera aussi la proposition originale 2.13 tirée de l'article [RJ9] et une mise en forme des techniques utilisées pour la topologie de Whitney tirées des travaux [RJ1, RJ3].

Les théorèmes de transversalités énoncés dans ce chapitre forment l'outillage de base pour les résultats de généricité des articles [RJ1, RJ2, RJ3, RJ4, RJ9, RJ11].

## 1 Introduction

Les propriétés introduites dans le chapitre 1 ne sont pas vérifiées pour tous les systèmes dynamiques. Prenons l'exemple des flots engendrés par une équation différentielle ordinaire

$$S(t)x = x(t) \quad \text{où } x(t) \text{ est la solution de } \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) & t > 0 \\ x(0) = x \in X \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $X$  est une variété différentielle de dimension  $d$  et  $f \in \mathcal{C}_{lip}^0(X, TX)$  un champ de vecteurs localement lipschitzien. On peut facilement construire des points d'équilibres non hyperboliques, en prenant par exemple  $X = \mathbb{R}$ ,  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 0$ . Toutefois, on peut espérer que « presque tous » les flots du type (2.1) vérifient les propriétés qui nous intéressent. Ainsi, ces dernières seront toujours vraies pour un système « tiré au sort ». Le problème vient du sens à donner à ces « presque tous » ou « tiré au sort ». Soit  $\Lambda$  un espace topologique, on aimerait définir une notion d'ensemble « gros » c'est-à-dire contenant « presque tout »  $\Lambda$ . Pour cela, il semble que le minimum à exiger de cette notion soit que :

- (a) un ensemble gros soit dense dans  $\Lambda$ ,
- (b) un ensemble contenant un ensemble gros soit gros,
- (c) un sous-ensemble gros d'un ouvert gros de  $\Lambda$  soit gros dans  $\Lambda$ ,
- (d) une intersection dénombrable d'ensembles gros soit encore gros,
- (e) la notion d'ensemble gros soit invariante par les transformations naturelles de  $\Lambda$  (translations, rotations, changement de cartes...).

Si  $\Lambda = \mathbb{R}^d$ , la notion d'ensemble gros communément admise est celle des ensembles de mesure de Lebesgue pleine. Le problème est qu'il n'y a pas d'équivalent naturel à la mesure de Lebesgue si  $\Lambda$  est de dimension infinie, comme c'est le cas pour l'ensemble  $\Lambda = \mathcal{C}^0(X, TX)$  des champs de vecteurs sur  $X$ . Plusieurs notions d'ensemble gros ont été proposées pour remédier à ce problème.

## 1.1 La généricité

La notion de généricité se base sur l'idée qu'un ouvert dense de  $\Lambda$  doit être un ensemble gros dans  $\Lambda$ . Vues les propriétés (a)-(e) citées ci-dessus, la notion d'ensemble gros au sens générique se définit comme suit.

**Définition 2.1.** *Soit  $\Lambda$  un espace topologique. Un sous-ensemble  $U \subset \Lambda$  est **générique** s'il contient une intersection dénombrable d'ouverts denses de  $\Lambda$ . Le complémentaire d'un ensemble générique est dit **maigre**.*

Cette notion a été introduite par Baire dans son cours [12]. Le point clef est de s'assurer qu'un ensemble générique est bien dense, les autres propriétés (b)-(e) venant directement de la définition. En fait, cette densité n'est pas toujours vérifiée dans un espace quelconque. Les espaces  $\Lambda$  dans lesquels les ensembles génériques sont toujours denses sont appelés espaces de Baire. Les espaces localement compacts ou métriques complets sont des espaces de Baire, ainsi que tout ouvert d'un espace de Baire. Il existe toutefois des espaces de Baire qui ne sont ni complets ni localement compacts comme  $\Lambda = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  muni de la topologie de Whitney, voir partie 3.

## 1.2 La prévalence

La notion de prévalence provient des travaux de Christensen [37] et de Hunt, Sauer et Yorke [79].

**Définition 2.2.** *Soit  $\Lambda$  un espace de Banach. Un borélien  $B$  de  $\Lambda$  est dit **Haar-nul** s'il existe une mesure borélienne  $\mu \geq 0$  non-triviale à support compact tel que*

$$\forall x \in \Lambda, \mu(x + B) = 0 .$$

*Plus généralement, tout ensemble contenu dans un borélien Haar-nul sera considéré comme Haar-nul.*

*Un sous-ensemble  $P$  d'un ouvert  $U \subset \Lambda$  est dit **prévalent** dans  $U$  si  $U \setminus P$  est Haar-nul dans  $\Lambda$ .*

Dans [79], il est prouvé que la notion de prévalence vérifie les propriétés (a)-(e) ci-dessus. Une propriété clef de la prévalence est que, en dimension finie, les ensembles prévalents sont exactement les ensembles de mesure de Lebesgue pleine. On citera [102] pour une revue sur la prévalence.

### 1.3 Autres notions

Il existe encore d'autres notions pour dire qu'un ensemble est négligeable et définir donc par complémentaire des ensembles gros vérifiant les propriétés (a)-(e) ci-dessus. Sans entrer dans les détails, on citera les ensembles cube-nuls de [96], les ensembles Gauss-nuls ou Aronszajn-nuls de [8], les ensembles  $s$ -null de [117] et les ensembles HP-petits de [86].

### 1.4 Discussion

Le choix d'une bonne notion d'ensemble gros paraît primordial surtout si on constate, pour ne regarder que ces deux notions, que la généricité et la prévalence peuvent avoir des conclusions contradictoires. Ainsi si  $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une liste des rationnels de  $[0, 1]$ ,  $A = \bigcap_n A_n$  avec  $A_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (r_k - \frac{1}{2^{nk^2}}, r_k + \frac{1}{2^{nk^2}}) \cap [0, 1]$  est de mesure nulle et est une intersection dénombrable d'ouverts denses de  $[0, 1]$ . L'ensemble  $A$  est donc gros pour la notion de généricité mais négligeable pour la notion de prévalence !

Toutefois, ce choix n'est pas si important que cela, si on croit le principe qu'un ensemble vraiment gros et important mathématiquement est forcément gros au sens de la généricité comme au sens de la prévalence. L'article [RJ11] va dans ce sens, puisqu'on y montre que tous les résultats obtenus grâce aux théorèmes de transversalité ci-dessous sont à la fois des résultats de généricité et de prévalence. Ainsi, dès que cela fait sens, tous les ensembles génériques apparaissant dans ce mémoire sont aussi des ensembles prévalents. Pour des résultats plus précis, on pourra consulter [18].

Dans toute la suite, nous ne parlerons toutefois plus que de généricité. En effet, c'est historiquement la notion la plus utilisée et c'est aussi la plus facile à manier (on notera par exemple que la prévalence n'est pas facilement généralisable aux variétés vue l'importance de la translation dans la définition).

Un autre point important à considérer, au moment de démontrer un résultat de généricité, est de savoir dans quelle classe de systèmes on souhaite obtenir la généricité. Si on considère par exemple le système (2.1), on pourrait prendre comme paramètre le champ de vecteurs  $f$ , c'est-à-dire  $\Lambda = \mathcal{C}_{lip}^0(X, TX)$ , mais aussi imposer plus de régularité en prenant  $\Lambda = \mathcal{C}^k(X, TX)$  avec  $k \geq 1$ . Pour les équations différentielles, ce choix de régularité dans le paramètre de généricité est un problème fondamental, puisque la densité exigée est plus difficile à obtenir si  $k$  est grand.

Dans le cadre des équations aux dérivées partielles, le problème du choix est encore plus complexe. Prenons par exemple une équation de réaction-diffusion

$$\partial_t u(x, t) = \operatorname{div}(a(x)\nabla u(x, t)) + f(x, u(x, t)) \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*$$

sur un domaine  $\Omega$ . Beaucoup de paramètres sont en jeu : le domaine  $\Omega$ , le coefficient de diffusion  $a$ , la réaction  $f$ ... Pour que le résultat de généricité soit pertinent, il faut savoir sur quel paramètre règne une incertitude et donc quel paramètre pourrait être « pris

au hasard ». Si par exemple, il s'agit d'un phénomène physique, il est fort possible que la fonction  $f$  soit imposée par la physique du modèle. Dans ce cas, choisir  $\Lambda$  comme l'ensemble des domaines  $\Omega$  possibles est plutôt pertinent. Dans un modèle biologique, la dynamique des interactions n'est en général connue que grossièrement,  $f$  fait donc un très bon paramètre.

Il faut enfin noter que plus l'espace de paramètres  $\Lambda$  est petit, plus les systèmes de la classe  $\Lambda$  auront certaines propriétés particulières, mais moins on aura de libertés pour perturber un système afin qu'il vérifie la propriété générique souhaitée, tout en restant dans la classe  $\Lambda$ .

Bref, pour montrer la généricité d'une propriété, il faut d'abord se fixer une classe de systèmes dépendant d'un paramètre  $\lambda \in \Lambda$  qui soit à la fois pertinente d'un point de vue du modèle (il faut rester dans la classe de modèles qui fait sens) et à la fois ne soit pas trop restrictif mathématiquement (on aimerait obtenir un théorème au final).

## 2 Théorèmes de transversalité

Les théorèmes de cette partie forment la boîte à outils du bon généricien. Leur cadre fonctionnel ou géométrique peut sembler rébarbatif, mais la plupart des propriétés dont on veut montrer la généricité peuvent s'écrire dans ces cadres. La majorité des résultats génériques cités dans ce mémoire sont démontrés grâce à ces théorèmes. La base de cette théorie provient des travaux de Sard [132], Smale [135] et Thom [143, 144]. On pourra aussi consulter le livre [1].

### 2.1 Valeurs critiques et régulières

Commençons par rappeler le fameux théorème de Sard extrait de [132].

**Définition 2.3.** *Soient  $M$  et  $N$  deux variétés de Banach de classe  $\mathcal{C}^1$  et soit  $f : M \rightarrow N$  une fonction différentiable. On suppose qu'en tout point  $x \in M$ , la différentielle  $Df(x) : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  a un noyau et une image fermés admettant des supplémentaires fermés. Un point  $x \in M$  est dit critique si  $Df(x)$  n'est pas surjective sur  $T_{f(x)} N$ . L'image d'un point critique est appelée **valeur critique**. Une valeur  $y \in N$  non critique est appelée **valeur régulière** de  $f$ .*

#### **Théorème 2.4. (Sard, 1942)**

*Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^s$  avec  $s > \max(p - q, 0)$ . Alors l'ensemble des valeurs critiques de  $f$  dans  $\mathbb{R}^q$  est de mesure de Lebesgue nulle.*

Afin de généraliser ce théorème aux espaces de Banach de dimension infinie, nous devons introduire la notion d'opérateur de Fredholm. Nous n'allons pas détailler toutes les propriétés de ce type d'opérateurs, on pourra consulter par exemple [23].

**Définition 2.5.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach et soit  $L : X \longrightarrow Y$  un opérateur linéaire continu. On dit que  $L$  est un **opérateur de Fredholm** si :

- (i) son image  $\text{Im } L$  est fermée et admet dans  $Y$  un supplémentaire fermé  $\tilde{Y}$  de dimension finie,
- (ii) son noyau  $\text{Ker } L$  est fermé et de dimension finie et admet dans  $X$  un supplémentaire fermé  $\tilde{X}$ .

L'indice de Fredholm est alors défini par  $\text{Ind}(L) = \dim(\text{Ker } L) - \dim(\tilde{Y})$ .

Un opérateur sera dit **semi-Fredholm**, ou plus précisément **Fredholm à gauche** (resp. **  droite**), si dans (i) ou (ii) on autorise  $\tilde{Y}$  (resp.  $\text{Ker } L$ )   être de dimension infinie. L'indice d'un opérateur semi-Fredholm pourra donc être  $-\infty$  ou  $+\infty$ .

L'intérêt des opérateurs de Fredholm est qu'ils permettent de revenir à la dimension finie à l'aide d'arguments de type Lyapounov-Schmidt. En effet, si  $L$  est de type Fredholm, on a les décompositions  $X = \text{Ker } L \oplus \tilde{X}$  et  $Y = \tilde{Y} \oplus \text{Im } L$  avec  $L$  induisant un isomorphisme entre  $\tilde{X}$  et  $\text{Im } L$ .

Un autre point important est que le concept d'opérateurs de Fredholm et de leur indice est stable.

**Proposition 2.6.** L'ensemble des opérateurs semi-Fredholm d'indice  $n \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$  donné est un ouvert de  $\mathcal{L}(X, Y)$ .

Si  $L : X \longrightarrow Y$  est un opérateur semi-Fredholm et si  $K : X \longrightarrow Y$  est un opérateur compact alors  $L + K$  est un opérateur semi-Fredholm de même indice que  $L$ .

Ces propriétés de stabilité permettent de définir le concept de fonction de Fredholm.

**Définition 2.7.** Soient  $M$  et  $N$  deux variétés de Banach connexes de classe  $\mathcal{C}^1$ . Une fonction  $F \in \mathcal{C}^1(M, N)$  est une **fonction de Fredholm** (resp. semi-Fredholm...) si, pour tout  $x \in M$ , la différentielle  $DF(x) : T_x M \longrightarrow T_{F(x)} N$  est un opérateur de Fredholm (resp. semi-Fredholm...). L'indice de  $F$  est celui de  $DF(x)$  pour n'importe quel point  $x \in M$ .

On notera que la connectivité de  $M$  et la stabilité de l'indice de Fredholm permettent de définir l'indice de  $F$  indépendamment du point  $x$  choisi.

Nous avons maintenant les outils pour énoncer le théorème de Smale.

**Théorème 2.8. (Smale, 1965)**

Soient  $k \geq 1$  et  $M$  et  $N$  deux variétés de Banach connexes et de classe  $\mathcal{C}^k$ . Soit  $F \in \mathcal{C}^k(M, N)$  une fonction Fredholm à gauche d'indice  $\text{Ind}(F) < k$ . On suppose que  $M$  est séparable ou que  $F$  est  $\sigma$ -propre dans le sens où il existe un recouvrement dénombrable  $M = \cup_{n \in \mathbb{N}} M_n$  tel que, pour tout compact  $K \subset N$ ,  $F^{-1}(K) \cap M_n$  est compact dans  $M_n$ .

Alors l'ensemble des valeurs régulières de  $F$  est générique dans  $N$ .

La première version de Smale dans [137] suppose que  $F$  est de type Fredholm et que  $M$  est séparable. Quinn dans [116] (voir aussi [117]) a remarqué que  $F$  Fredholm à gauche et

$\sigma$ –propre sont des hypothèses plus faibles et toujours suffisantes. Dans [RJ11], on montre que l’ensemble des valeurs régulières de  $F$  est non seulement générique mais aussi prévalent dans  $N$ , pour peu qu’il s’agisse d’un espace vectoriel (pour que la notion de prévalence soit bien définie).

## 2.2 Quelques théorèmes du type Sard-Smale

Les théorèmes de Sard et Smale peuvent être directement utilisés afin d’obtenir des résultats de généricité. Toutefois, il est plus pratique d’utiliser le point de vue des théorèmes de transversalité (dits de « Sard-Smale ») qui fait apparaître explicitement un espace de paramètres. Les théorèmes de ce paragraphe sont utilisés de nombreuses fois dans les résultats de généricité des articles [RJ1, RJ2, RJ3, RJ4, RJ9, RJ11]. Nous ne donnerons pas de démonstration précise ici, on consultera pour ce faire [1], [76], [131], [145] ou [67].

Commençons par la version la plus classique du théorème de Sard-Smale.

### **Théorème 2.9. (Sard-Smale « classique »)**

Soient  $k \geq 1$  et  $M$ ,  $N$  et  $\Lambda$  trois variétés  $\mathcal{C}^k$  de Banach. Soit  $y \in N$  et  $\Phi \in \mathcal{C}^k(M \times \Lambda, N)$ .

Supposons que :

(i) pour tout  $(x, \lambda) \in \Phi^{-1}(\{y\})$ , la différentielle partielle  $D_x\Phi(x, \lambda) : T_xM \rightarrow T_yN$  est un opérateur de Fredholm à gauche d’indice  $i < k$ ,

(ii) pour tout  $(x, \lambda) \in \Phi^{-1}(\{y\})$ , la différentielle totale  $D\Phi(x, \lambda) : T_xM \times T_\lambda\Lambda \rightarrow T_yN$  est surjective,

(iii) l’application  $\Phi$  est  $\sigma$ –propre dans le sens où il existe un recouvrement dénombrable  $\Phi^{-1}(\{y\}) \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} M_n$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout compact  $K \subset \Lambda$ , l’ensemble  $\{x \in M, \exists \lambda \in K, (x, \lambda) \in M_n \text{ et } \Phi(x, \lambda) = y\}$  est compact dans  $M$ . Ou, plus particulièrement, on pourra simplement supposer  $M$  séparable.

Alors,  $\mathfrak{G} = \{\lambda \in \Lambda, y \text{ est une valeur régulière de } \Phi(., \lambda)\}$  est générique dans  $\Lambda$ .

### **Remarques :**

- La démonstration consiste à vérifier que  $\Phi^{-1}(\{y\})$  est une sous-variété de  $M \times \Lambda$  (conditions (i) et (ii)), puis d’appliquer le théorème de Smale à la projection de cette sous-variété sur  $M$ , voir [1].
- Contrairement à ce qui est marqué dans certains énoncés, la bonne hypothèse dans (iii) est que  $M$  soit séparable et non  $M \times \Lambda$  dans son ensemble. En effet, dans la définition de  $\sigma$ –propreté de (iii), l’espace  $\Lambda$  n’est vu qu’à travers un compact, qui est toujours séparable (voir [67]).
- Comme pour le théorème de Smale, l’article [RJ11] montre qu’on peut remplacer « générique » par « prévalent » dans la conclusion du théorème (si, bien sûr,  $\Lambda$  est un ouvert d’un espace de Banach), voir aussi [18].
- Si l’indice  $i$  est négatif, alors  $D_x\Phi$  n’est jamais surjectif et la conclusion du théorème devient que  $\mathfrak{G} = \{\lambda \in \Lambda, y \text{ n’est pas dans l’image de } \Phi(., \lambda)\}$  est générique dans  $\Lambda$ .

On peut généraliser l'énoncé 2.9 dans plusieurs directions. Ainsi, on peut se contenter de vérifier les hypothèses (i) et (ii) sur un sous-ensemble dense (par exemple les fonctions analytiques au lieu de toutes les fonctions). Ceci est une conséquence des stabilités des propriétés des opérateurs de Fredholm par de petites perturbations.

**Théorème 2.10.** *Soit  $\hat{\Lambda}$  un sous-ensemble dense de  $\Lambda$ . L'énoncé du théorème 2.9 reste valide si dans les hypothèses (i) et (ii), on remplace « pour tout  $(x, \lambda) \in \Phi^{-1}(\{y\})$  » par « pour tout  $(x, \hat{\lambda}) \in \Phi^{-1}(\{y\}) \cap M \times \hat{\Lambda}$  ».*

Dans [131], il est remarqué qu'on peut utiliser l'alternative de Fredholm afin de vérifier plus simplement l'hypothèse (ii). Pour cela, on devra supposer que  $D_x\Phi$  est de Fredholm et non plus seulement semi-Fredholm.

**Théorème 2.11. (Saut-Temam 1979)**

*Le théorème 2.9 reste valide si les hypothèses (i) et (ii) sont modifiées comme suit.*

(i) *pour tout  $(x, \lambda) \in \Phi^{-1}(\{y\})$ , la différentielle partielle  $D_x\Phi(x, \lambda) : T_xM \rightarrow T_yN$  est un opérateur de Fredholm d'indice  $i < k$ ,*

(ii) *pour tout  $(x, \lambda) \in \Phi^{-1}(\{y\})$ , l'image de  $D\Phi(x, \lambda) : T_xM \times T_\lambda\Lambda \rightarrow T_yN$  est dense. En particulier, si  $T_yN$  est un espace de Hilbert, cela est équivalent à supposer que pour tout  $y \in \text{Ker}(D_x\Phi(x, \lambda))^* \setminus \{0\}$ , il existe  $\dot{\lambda} \in T_\lambda\Lambda$  tel que  $\langle y | D_\lambda\Phi(x, \lambda) \cdot \dot{\lambda} \rangle \neq 0$ .*

Une autre généralisation est due à Henry [76]. L'idée est que, dans le cas d'un indice de Fredholm négatif, la surjectivité n'est pas indispensable. On peut en effet rajouter des dimensions à  $N$  sans pour autant que la conclusion «  $\mathfrak{G} = \{\lambda \in \Lambda, y \text{ n'est pas dans l'image de } \Phi(\cdot, \lambda)\}$  est générique dans  $\Lambda$  » ne soit modifiée.

**Théorème 2.12. (Henry)**

*Soient  $M, N$  et  $\Lambda$  trois variétés  $\mathcal{C}^1$  de Banach. Soit  $y \in N$  et  $\Phi \in \mathcal{C}^1(M \times \Lambda, N)$ . Supposons que :*

(i) *pour tout  $(x, \lambda) \in \Phi^{-1}(\{y\})$ , la différentielle partielle  $D_x\Phi(x, \lambda) : T_xM \rightarrow T_yN$  est un opérateur de Fredholm à gauche,*

(ii) *pour tout  $(x, \lambda) \in \Phi^{-1}(\{y\})$ , il existe une décomposition de l'image de  $D\Phi(x, \lambda)$  en espaces fermés  $\text{Im}(D\Phi(x, \lambda)) = \text{Im}(D_x\Phi(x, \lambda)) \oplus Z$  avec  $\dim(Z) > \dim(\text{Ker } D_x\Phi(x, \lambda))$ ,*

(iii) *l'application  $\Phi$  est  $\sigma$ -propre dans le sens du théorème 2.9 ou plus simplement  $M$  est séparable. Alors, l'ensemble  $\mathfrak{G} = \{\lambda \in \Lambda, y \text{ n'est pas dans l'image de } \Phi(\cdot, \lambda)\}$  est générique dans  $\Lambda$ .*

L'hypothèse (ii) peut être difficile à vérifier. Dans les applications, il arrive souvent que  $D_x$  se présente sous la forme  $L + K$  avec  $L$  un opérateur de Fredholm simple (par exemple le laplacien) et  $K$  une perturbation compacte. La vérification de (i) découle alors de la proposition 2.6. Pour vérifier (ii), on peut utiliser le critère suivant mis au point dans [RJ9].

**Proposition 2.13.** *Soit  $L : X \rightarrow Y$  un opérateur de Fredholm à gauche et soient  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  des espaces supplémentaires fermés à son noyau et son image. Supposons que  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille libre infinie de  $\tilde{Y}$ . Alors, pour tout opérateur compact  $K : X \rightarrow Y$ , il existe un sous-espace de dimension finie  $Z = \text{vect}(z_{n_1}, \dots, z_{n_p})$  tel que  $Z \cap \text{Im}(L + K) = \{0\}$  et la dimension de  $Z$  est strictement plus grande que celle de  $\text{Ker}(L + K)$ .*

Autrement dit, si l'hypothèse (ii) du théorème 2.12 est vérifiée pour  $L$  avec  $Z$  de dimension infinie, alors (ii) est vérifiée pour  $L + K$ .

Enfin, voici une version plus géométrique du théorème de transversalité, que l'on trouvera dans [1].

**Définition 2.14.** *Soient  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux variétés  $\mathcal{C}^1$  de Banach et soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ . Soit  $\mathcal{W}$  une sous-variété  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathcal{N}$ . La fonction  $f$  est dite **transverse**    $\mathcal{W}$  en un point  $x \in \mathcal{M}$  si  $f(x) \notin \mathcal{W}$  ou bien si  $f(x) \in \mathcal{W}$  et*

- i)  $D_x f^{-1}(T_{f(x)}\mathcal{W})$  est un sous-espace fermé de  $T_x\mathcal{M}$  qui admet un supplémentaire fermé,*
- ii)  $D_x f(T_x\mathcal{M})$  contient un supplémentaire fermé à  $T_{f(x)}\mathcal{W}$  dans  $T_{f(x)}\mathcal{N}$ .*

**Théorème 2.15.** *Soient  $r \geq 1$ ,  $\mathcal{M}$  une variété  $\mathcal{C}^r$  séparable de dimension  $n$  et soit  $\mathcal{W}$  une variété  $\mathcal{C}^r$  de codimension  $m$  dans un espace de Banach  $Y$ . Soit  $\Lambda$  un ouvert d'un espace de Banach et soit  $\hat{\Lambda}$  un ensemble dense dans  $\Lambda$ . Soit  $\Phi \in \mathcal{C}^r(\mathcal{M} \times \Lambda, Y)$ . On suppose que :*

- i)  $r > n - m$ ,*
- ii)  $\Phi$  est transverse à  $\mathcal{W}$  en tout point  $(x, \lambda) \in \mathcal{M} \times \hat{\Lambda}$ .*

*Alors, il existe un ensemble générique de paramètres  $\lambda \in \Lambda$  tels que l'application  $x \mapsto \Phi(x, \lambda)$  est transverse en tout point à  $\mathcal{W}$ .*

## 2.3 Un exemple rapide d'utilisation

Les énoncés des théorèmes de type Sard-Smale sont assez techniques. Pour avoir une idée de leur application et pour pouvoir par la suite discuter de leur utilisation dans les différents articles, nous allons en donner ici un exemple simple.

On considère une équation parabolique

$$\partial_t u = \Delta u + f(x, u) \tag{2.2}$$

sur un ouvert borné régulier  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ . On prendra  $\Delta$  comme le laplacien avec condition de Dirichlet au bord. Pour éviter les problèmes techniques (voir paragraphe 3), on supposera que  $f$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{C}_b^1(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  des fonctions  $\mathcal{C}^1$  bornées et de différentielle bornée, que l'on munira de la norme  $\|f\|_\infty + \|D_{(x,u)}f\|_\infty$ . Le but est de démontrer que les équilibres de cette équation parabolique sont tous hyperboliques pour une fonction  $f$  générique de  $\mathcal{C}_b^1(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**Proposition 2.16.** *Il existe un ensemble générique de fonctions  $f \in \mathcal{C}_b^1(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  tel que tout équilibre  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  de (2.2) soit hyperbolique.*



**Démonstration** : Soit  $u$  un équilibre de (2.2). On considère la linéarisation autour de  $u$  donnée par l'opérateur

$$L_u : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \quad L_u v = \Delta v + f'_u(x, u)v .$$

Comme  $L_u$  est autoadjoint, le seul spectre possible de partie réelle nulle est l'éventuelle valeur propre 0. Le laplacien  $\Delta$  est une bijection de  $H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  sur  $L^2(\Omega)$ , c'est donc un opérateur de Fredholm d'indice 0. Comme la multiplication par  $f'_u(x, u)$  est, quant à elle, compacte de  $H^2$  dans  $L^2$ , la proposition 2.6 montre que  $L_u$  est un opérateur de Fredholm d'indice 0. On en déduit que 0 n'est pas valeur propre de  $L_u$  si et seulement si  $L_u$  est surjectif.

On va alors appliquer le théorème de transversalité 2.11 de la manière suivante.

$$M = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) , \quad N = L^2(\Omega) , \quad \Lambda = \mathcal{C}_b^1(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ et } y = 0$$

$$\Phi(u, f) = \Delta u + f(x, u) .$$

Il est clair que  $\Phi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et que  $M$  est séparable. On a

$$D_{u,f}\Phi(u, f) \cdot (\dot{u}, \dot{f}) = L_u \dot{u} + \dot{f}(x, u)$$

et on a déjà justifié que  $D_u\Phi = L_u$  est un opérateur de Fredholm d'indice 0. Finalement, le critère (ii) du théorème 2.11 est vérifié puisque l'image de  $D_f\Phi(u, f)$  contient les fonctions  $\dot{f}(x)$  de classe  $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  qui sont denses dans  $L^2(\Omega)$ . En appliquant la deuxième partie du critère, on aurait eu à trouver, pour chaque solution  $\dot{y}$  de  $\Delta \dot{y} + f'_u(x, u)\dot{y} = 0$ , une fonction  $\dot{f}(x)$  telle que

$$\int_{\Omega} \dot{y}(x) \dot{f}(x) dx \neq 0 . \tag{2.3}$$

Toutes les hypothèses du théorème 2.11 étant vérifiées, il existe un ensemble générique de fonction  $f$  telles que  $L_u$  est surjectif pour toute solution de  $\Delta u + f(x, u) = 0$ . D'après la discussion du début de la démonstration, cela démontre bien l'hyperbolicité des équilibres de (2.2). □

### 3 Topologie de Whitney

Dans l'exemple ci-dessus, nous avons considéré des non-linéarités  $f$  dans  $\mathcal{C}_b^1(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ , c'est-à-dire que nous les avons supposées bornées. Ce n'est évidemment pas satisfaisant car, le plus souvent, une non-linéarité est à croissance polynomiale. Il nous faut donc munir  $\mathcal{C}^1(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  d'une topologie raisonnable, qui prend aussi en compte les fonctions non bornées.

La topologie classiquement utilisée est la topologie de Whitney.

**Définition 2.17.** Soient  $M$  et  $N$  deux variétés  $\mathcal{C}^k$ –différentiables de dimension finie, et soit  $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ . La **topologie de Whitney** sur  $\mathcal{C}^k(M, N)$  est la topologie engendrée par les voisinages

$$\mathcal{N}_{f,\delta} = \{g \in \mathcal{C}^k(M, N) \mid \|D^i f(u) - D^i g(u)\| < \delta(u), \forall i = 0, \dots, k, \forall u \in M\}, \quad (2.4)$$

où  $f$  est une fonction de  $\mathcal{C}^k(M, N)$  et  $\delta$  est une fonction continue réelle strictement positive sur  $M$ .

On notera que si  $M$  est compact, si  $N = \mathbb{R}^d$  et si  $k < \infty$ , alors la topologie de Whitney co incide avec la topologie standard qui fait de  $\mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^d)$  un espace de Banach. Si  $M$  n'est pas compact, la topologie de Whitney permet de prendre en compte les fonctions non bornées. En outre, un voisinage  $\mathcal{N}_{f,\delta}$  peut ˆtre pris suffisamment finement pour que  $\mathcal{N}_{f,\delta} - f$  soit inclus dans tout  $W^{k,p}(M)$ . Ainsi, toutes les quantités du type  $\int_M (f^{(i)}(x))^p dx$  ( $i \leq k$ ) sont continues par rapport à  $f$  pour la topologie de Whitney. Le mauvais point de la topologie de Whitney est que, quand  $M$  n'est pas borné, on ne peut trouver une base dénombrable de voisinages d'une fonction  $f$  donnée (voir [61] ou [77]). Cela a deux conséquences problématiques :

- 1)  $\mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^d)$  muni de la topologie de Whitney n'est pas un espace métrisable et encore moins un espace de Banach.
- 2) la topologie n'est pas donnée par les suites et un ensemble séquentiellement fermé n'est pas nécessairement fermé (on trouvera un exemple explicite dans [67]).

Le point 2) n'est pas grave en pratique, pour peu que l'on fasse attention. En fait, la convergence d'une suite est une propriété très forte :  $(f_n)$  converge vers  $f$  pour la topologie de Whitney si et seulement s'il existe un compact  $K$  de  $M$  tel que  $f_n|_K$  converge vers  $f|_K$  au sens usuel de  $\mathcal{C}^k$  et tel que pour tout  $n$  assez grand,  $f_n \equiv f$  sur  $M \setminus K$  (voir [61]).

Quand on souhaite démontrer la généricité d'une propriété  $\mathcal{P}$  par rapport à une fonction  $f \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^d)$ , le point 1) est bien plus gênant. On commencera par noter que  $\mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^d)$  muni de la topologie de Whitney est quand mˆme un espace de Baire, mˆme s'il n'est pas métrisable (voir [61]). Ainsi, il est toujours pertinent de démontrer la généricité d'une propriété dans cet espace, mˆme si  $M$  n'est pas compact. Le vrai souci est qu'on ne peut appliquer directement les théorèmes de transversalité avec  $\Lambda = \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^d)$ , puisque  $\Lambda$  est loin d'ˆtre une variété de Banach. Afin de résoudre ce problème, il faut se ramener à un compact de  $M$  en découpant  $M$  en union croissante de compacts  $K_n$  et écrire la propriété  $\mathcal{P}$  comme l'intersection de propriétés  $\mathcal{P}_n$  qui ne dépendent de  $f$  que par les valeurs de  $f|_{K_n}$  (on fera ici deux abus de langage en identifiant la propriété  $\mathcal{P}_n$  dans  $\mathcal{C}^k(M, N)$  et dans  $\mathcal{C}^k(K_n, N)$  et en identifiant la propriété avec l'ensemble des fonctions la vérifiant). On utilise alors une procédure que l'on peut formaliser par la proposition suivante démontrée dans [67].

**Proposition 2.18.** Soit  $(K_n)$  une suite croissante de compacts de bord de classe  $\mathcal{C}^k$  telle que  $M = \cup_n K_n$  et que  $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ . On suppose que l'on peut écrire  $\mathcal{P} = \cap_n \mathcal{P}_n$  avec  $\mathcal{P}_n$  une propriété qui ne dépend que des valeurs de  $f$  dans  $K_n$ .

---

Alors, si  $\mathcal{P}_n$  est un ouvert dense (resp. un ensemble générique) de  $\mathcal{C}^k(K_{n+1}, N)$ , alors  $\mathcal{P}_n$  est un ouvert dense (resp. un ensemble générique) de  $\mathcal{C}^k(M, N)$  muni de la topologie de Whitney. En particulier,  $\mathcal{P} = \bigcap_n \mathcal{P}_n$  est alors générique dans  $\mathcal{C}^k(M, N)$ .

Le point clef est que l'on peut maintenant utiliser les théorèmes de transversalité pour montrer que  $\mathcal{P}_n$  est un ouvert dense de  $\mathcal{C}^k(K_{n+1}, N)$ , puisque ce dernier espace est une variété de Banach. Dans les articles comme [26] ou [80, RJ3, RJ4], la procédure formalisée par la proposition 2.18 est faite «   la main ». On trouvera aussi des articles où, pour montrer que  $\mathcal{P}_n$  est ouverte, on utilise la caractérisation de la fermeture par les suites, sans clairement mentionner qu'il y a là un souci avec la topologie de Whitney, ni comment contourner le problème.



# Chapitre 3 : Dynamique générique des EDP paraboliques

Le but de ce chapitre est de passer en revue les résultats connus concernant la dynamique des équations paraboliques scalaires. On y trouvera en particulier les articles [RJ2], [RJ3] et [RJ4] écrits en collaboration avec Geneviève Raugel, ainsi que [RJ1] écrit avec Geneviève Raugel et Pavol Brunoský. Ce chapitre reprend pour l'essentiel le parallèle entre la dynamique des EDP paraboliques et la dynamique des EDO, tel qu'il a été introduit dans [RJ2].

## 1 Introduction

Le cadre que nous nous fixons est le suivant. On note  $\Omega$  un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^d$  et on prend une non-linéarité  $f \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  avec  $k \geq 1$ . On choisit  $p > d$  et  $\alpha \in ](p+d)/2p, 1[$  et on pose  $X^\alpha = D((Id - \Delta)^\alpha)$  avec  $\Delta$  le laplacien de Neumann sur  $L^p(\Omega)$  (en fait, le choix des conditions aux bords n'influera pas sur les propriétés énoncées dans ce chapitre et nombre d'articles cités considèrent en fait des conditions de Dirichlet). On notera que les conditions sur  $p$  et  $\alpha$  font que  $X^\alpha$  s'injecte continûment dans  $W^{2\alpha,p}(\Omega)$  et donc de façon compacte dans  $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ .

Nous allons considérer le système dynamique  $S(t)$  sur  $X^\alpha$  engendré par l'équation parabolique

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = \Delta u(x, t) + f(x, u(x, t), \nabla u(x, t)) & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0 & (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) = u_0(x) \in X^\alpha \end{cases} \quad (3.1)$$

La théorie classique du problème de Cauchy pour les équations paraboliques semi-linéaires montre que les solutions de (3.1) sont bien définies localement, voir [74]. On supposera de plus qu'il existe  $c \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $\kappa > 0$  tels que

$$\forall R > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \sup_{(x,z) \in \overline{\Omega} \times [-R,R]} |f(x, z, \xi)| \leq c(R)(1 + |\xi|^{2-\varepsilon}) \quad (3.2)$$

$$\text{et } \forall z \in \mathbb{R}, \forall x \in \overline{\Omega}, |z| \geq \kappa \Rightarrow z f(x, z, 0) < 0. \quad (3.3)$$

On trouvera dans [114] la preuve que ces conditions suffisent à assurer que les trajectoires de (3.1) sont globalement définies sur  $\mathbb{R}_+$  et, qu'en outre, le système dynamique  $S(t)$  admet un attracteur global compact  $\mathcal{A}$ .

Le but des travaux discutés dans ce chapitre est de comprendre au mieux la dynamique sur cet attracteur  $\mathcal{A}$ . En particulier, on s'attachera à comprendre la dynamique générique, c'est-à-dire celle engendré par presque toutes les non-linéarités  $f$ .

## 2 Un parallèle avec la dynamique en dimension finie

Les équations paraboliques forment un des tous premiers types d'EDP dont on a étudié la dynamique (le travail souvent considéré comme fondateur est celui de Chafee et Infante [31, 32]). En effet, surtout en dimension  $d = 1$ , la dynamique de (3.1) est très particulière (principe du maximum, théorie de Sturm...). L'étude de cette dynamique en est donc simplifiée et constitue un point de départ pour généraliser aux EDP les résultats connus sur les équations différentielles ordinaires (voir le chapitre d'introduction). Comme souligné dans [RJ2], on peut même dresser un parallèle très pertinent entre la dynamique des équations paraboliques et celles des EDO de la forme

$$\dot{y}(t) = g(y(t)) \quad y \in \mathbb{R}^d \quad (3.4)$$

avec  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  tel que  $\langle g(y), y \rangle < 0$  pour  $\|y\|$  assez grand (cette dernière hypothèse assurant l'existence d'un attracteur pour l'EDO (3.4) dans  $\mathbb{R}^d$ ).

### 2.1 Équations paraboliques sur un segment

Considérons d'abord la dynamique de l'équation parabolique (3.1) sur le segment  $\Omega = ]0, 1[$ . On a vu que (3.2) et (3.3) impliquent que  $S(t)$  possède un attracteur global compact  $\mathcal{A}$ . La dynamique sur  $\mathcal{A}$  est en fait très particulière, à cause d'une part de la fonctionnelle de Lyapounov introduite dans [149], d'autre part de la propriété de décroissance du nombre des zéros (voir le paragraphe 4.1 ci-dessous). Comme  $S(t)$  est un système dynamique de type gradient,  $\mathcal{A}$  est génériquement réduit à une union finie de variétés instables de points d'équilibre (voir le théorème 1.10). Chafee et Infante ont été les premiers à explorer la dynamique de  $\mathcal{A}$  dans le cas  $f(x, u, \partial_x u) = \lambda(u - u^3)$  dans les articles [31, 32]. On notera en particulier qu'en prenant  $\lambda$  assez grand, l'attracteur  $\mathcal{A}$  a une dimension et un nombre de points d'équilibre aussi grands que voulu. L'étude de ce cas particulier sera complété par Henry dans [75]. Cet article montre que les variétés stables et instables de deux points d'équilibres hyperboliques sont automatiquement transverses. Autrement dit, la propriété de Morse-Smale est automatiquement vérifiée par  $S(t)$ , dès que les équilibres sont hyperboliques (ce qui est générique par rapport à la majorité des paramètres, y compris par rapport à  $f(u)$  si on se rajoute comme contrainte que  $f$  ne dépend que de  $u$ , voir [25] et [138]). Cette transversalité automatique a aussi été démontrée indépendamment dans [4].

La propriété la plus étonnante de l'équation parabolique (3.1) sur le segment  $\Omega = ]0, 1[$ , est que la connaissance des points d'équilibre (c'est-à-dire des graphes des fonctions  $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$  associées) suffit à décrire intégralement la dynamique sur  $\mathcal{A}$  : quels sont les points d'équilibres connectés par des hétéroclines, quelles sont les dimensions des variétés instables. . . Nous n'allons pas entrer dans les détails de ces résultats ici, nous renvoyons le lecteur aux articles correspondants [28, 46, 47, 48, 53, 147].

Ces différents résultats sont principalement des conséquences de la propriété de décroissance du nombre des zéros (voir le paragraphe 4.1 ci-dessous) et très particuliers à l'équation parabolique en dimension un d'espace. Ils montrent que, même si l'attracteur global  $\mathcal{A}$  peut être de grande dimension, la dynamique sur  $\mathcal{A}$  est simple et ne peut exhiber de phénomènes plus complexes que ceux d'une équation différentielle ordinaire sur  $\mathbb{R}$ . En outre, il n'est pas compliqué de voir que toute EDO du type (3.4) en dimension  $d' = 1$  peut être plongée dans une équation parabolique sur  $\Omega = ]0, 1[$  (dans le cas des conditions aux bords de Neumann, il suffit de prendre  $f(x, u, \partial_x u) = g(u)$  et de regarder les fonctions spatialement constantes). La dynamique de l'équation parabolique ne peut donc être plus simple que celle d'une EDO en dimension un.

$\Rightarrow$  *La dynamique des équations paraboliques sur un segment est qualitativement la même que celle des équations différentielles sur  $\mathbb{R}$ .*

## 2.2 Équations paraboliques sur le cercle

Nous considérons dans ce paragraphe l'équation parabolique (3.1) sur  $\Omega = ]0, 1[$  avec des conditions aux bords périodiques (ou, ce qui revient au même, sur le cercle  $\mathbb{T}^1$ ). La dynamique du système  $S(t)$  associé est plus complexe que dans le cas du segment, puisqu'il peut exister des orbites périodiques. Toutefois, la propriété de Sturm de décroissance du nombre des zéros est encore vérifiée. Une conséquence importante est que la propriété de Poincaré-Bendixson est vérifiée pour (3.1) quand  $\Omega = \mathbb{T}^1$ , voir [45]. Ainsi, bien que l'attracteur  $\mathcal{A}$  de  $S(t)$  puisse être de grande dimension, la dynamique sur  $\mathcal{A}$  est contrainte comme celle d'une équation différentielle en dimension  $d' = 2$  (voir [109] et [20]).

Du coup, il est naturel de chercher à généraliser le résultat de Peixoto [107] en montrant que la propriété de Morse-Smale est vérifiée par (3.1) sur  $\mathbb{T}^1$ , génériquement par rapport à  $f$ . Le premier pas dans cette direction a été effectué par Czaja et Rocha dans [40] : ils montrent comment obtenir certaines propriétés de transversalité automatique, comme celle des variétés stables et instables d'orbites périodiques hyperboliques, ou la non-existence d'homoclines à une orbite périodique. Pour obtenir la propriété de Morse-Smale, il restait à montrer les propriétés génériques : hyperbolicité générique des points d'équilibres et des orbites périodiques, non-existence générique d'homoclines à ses équilibres etc. Ces dernières propriétés ont été démontrées dans [RJ3] et [RJ4], impliquant la généricité par rapport à  $f$  de la propriété de Morse-Smale pour l'équation parabolique (3.1) sur le cercle  $\Omega = \mathbb{T}^1$ .

Enfin, dans [130], il est montré que n'importe quelle dynamique d'une EDO (3.4) en

dimension  $d' = 2$  peut être retrouvée dans le flot d'une EDP parabolique (3.1) sur  $\Omega = \mathbb{T}^1$  si  $f$  est bien choisie.

$\Rightarrow$  *La dynamique des équations paraboliques sur le cercle est qualitativement la même que celle des équations différentielles sur  $\mathbb{R}^2$ .*

## 2.3 Équations paraboliques sur le cercle avec symétrie

Comme nous venons de le voir, la dynamique de l'équation parabolique sur le cercle est plus complexe que celle sur le segment. En particulier, il n'est plus possible de comprendre la dynamique simplement avec la donnée des points d'équilibre et des orbites périodiques. Pour pouvoir retrouver ce type de propriété, il faut restreindre le choix des non-linéarités aux fonctions  $f(x, u, \partial_x u) \equiv f(u, \partial_x u)$  qui ne dépendent pas de  $x$ . Dans ce cas, l'équation (3.1) est invariante par la rotation  $x \mapsto x + h$  et sa dynamique possède donc une invariance par la rotation  $u \mapsto u(\cdot + h)$  dans  $X^\alpha$ . Dans [5], Angenent et Fiedler ont montré que toute orbite périodique de (3.1) est alors une « onde rotative » du type  $u(x, t) = v(x - ct)$ . On notera par ailleurs que, à part les équilibres constants en espace, les équilibres de (3.1) forment des cercles et sont assimilables à des « ondes rotatives gelées ». En utilisant ces propriétés de la dynamique (3.1) sur le cercle quand  $f$  ne dépend pas de  $x$ , [98], [49] et [127] ont montré comment obtenir la description complète de cette dynamique à partir de la donnée des points d'équilibre et des ondes rotatives et quelles sont les propriétés particulières de cette dynamique (par exemple la non-existence d'orbites homoclines).

Concernant la propriété de Morse-Smale, la contrainte de symétrie  $f(x, u, \partial_x u) \equiv f(u, \partial_x u)$  ne rend pas possible l'application directe du résultat de généricité pour le cas général. Toutefois, la description de la dynamique donnée par [49] implique que la propriété de Morse-Smale est vérifiée si et seulement les équilibres et orbites périodiques de (3.1) sont tous hyperboliques. La généricité de cette hyperbolicité, dans la classe des fonctions  $f$  indépendantes de  $x$ , a été montrée dans [RJ4], impliquant donc la généricité de la propriété de Morse-Smale. On notera au passage, que si  $f$  ne dépend que de  $u$ , alors on ne peut « dégeler » les cercles d'équilibres  $u_h(x) = u(x + h)$  avec  $u$  non constant en espace. De ce fait, l'hyperbolicité des points d'équilibre, et a fortiori la propriété de Morse-Smale, ne peuvent être génériques par rapport à  $f(u)$ .

Pour poursuivre le parallèle avec les équations différentielles sur le plan  $\mathbb{R}^2$ , on constate que les propriétés particulières découlant de l'indépendance de  $f$  en  $x$  correspondent parfaitement à celles des EDO du plan, dont le champ de vecteurs possède une symétrie radiale. Dans [67], on trouvera une démonstration que de tels EDO se plongent facilement dans un sous-espace invariant de dimension deux du flot d'une équation parabolique (3.1) avec  $f$  indépendante de  $x$ .

$\Rightarrow$  *La dynamique des équations paraboliques sur le cercle, avec  $f$  indépendante de  $x$ , est qualitativement la même que celle des équations différentielles sur  $\mathbb{R}^2$  possédant une*



*symétrie radiale.*

## 2.4 Équations paraboliques sur $\Omega$ de dimension $d \geq 2$ .

Dès que le domaine  $\Omega$  est de dimension  $d$  supérieure ou égale à 2, la dynamique de l'équation parabolique (3.1) peut être extrêmement complexe. En effet, Poláčik a montré dans [110] et [111] qu'il existe un ensemble dense de champs de vecteurs de la boule  $B^3$  de  $\mathbb{R}^3$  que l'on peut réaliser dans le flot d'une équation parabolique (3.1), avec  $f$  et  $\Omega$  de dimension  $d = 2$  bien choisis. Par « réaliser », on entend ici que l'on peut trouver une sous-variété de dimension 3 dans  $X^\alpha$ , qui est invariante par le flot de (3.1), et sur laquelle la dynamique de  $S(t)$  est conjuguée à celle de l'équation différentielle ordinaire sur  $B^3$ . Ceci montre en particulier que l'on peut réaliser de façon robuste des dynamiques chaotiques : homocline transverse, attracteur de Lorenz, flot Anosov... Poláčik et Dancer ont montré dans [41] qu'un résultat de réalisation semblable est même possible avec  $f \equiv f(u, \nabla u)$  indépendant de  $x$ .

On sait donc que la propriété de Morse-Smale ne peut être vérifiée en général pour les équations paraboliques sur  $\Omega$  de dimension 2 ou plus grande. Dans [RJ1], on montre que la propriété de Kupka-Smale reste toutefois vraie pour un ensemble générique de non-linéarités  $f(x, u, \nabla u)$ .

$\Rightarrow$  *La dynamique des équations paraboliques sur un domaine  $\Omega$  de dimension  $d \geq 2$  est qualitativement au moins aussi complexe que celle des EDO en dimension 3 et plus.*

## 2.5 Équations paraboliques avec $f \equiv f(x, u)$

Nous venons de voir que, dans le cadre général de la dimension  $d \geq 2$ , la dynamique de l'équation parabolique (3.1) peut être très complexe. Toutefois, il n'en est pas de même si on fait l'hypothèse naturelle que  $f \equiv f(x, u)$  ne dépend que de  $x$  et des valeurs de  $u$ . Dans ce cas, (3.1) admet une fonctionnelle de Lyapounov

$$E(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - F(x, u(x)) \right) dx ,$$

où  $F(x, u) = \int_0^u f(x, v) dv$  est une primitive de  $f$ . Le système dynamique  $S(t)$  est donc de type gradient et Brunovský et Poláčik ont démontré dans [26] que la propriété de Morse-Smale est générique par rapport à  $f$ . Enfin, dans [112], Poláčik a prouvé que toute équation différentielle de type gradient  $\dot{y}(t) = \nabla G(y(t))$  peut-être réalisée dans le flot de (3.1) avec une non-linéarité  $f \equiv f(x, u)$ .

$\Rightarrow$  *La dynamique des équations paraboliques avec  $f \equiv f(x, u)$  est qualitativement la même que celle des EDO de type gradient.*

### 3 Propriétés de Kupka-Smale et de Morse-Smale : récapitulatif

Jusqu'à récemment, les seuls résultats de généricité des propriétés de Kupka-Smale et de Morse-Smale pour les équations paraboliques se limitaient aux dynamiques de type gradient [76], [4] et [26]. Les travaux [RJ1], [RJ3] et [RJ4], coécrits avec Geneviève Raugel et Pavol Brunovský, ont eu pour but de compléter au maximum ce type de résultats dans le cas des équations paraboliques scalaires (3.1) qui ne possèdent pas de structure de type gradient. En particulier, ce sont les premiers résultats de généricité de l'hyperbolicité des orbites périodiques pour des systèmes dynamiques engendrés par des EDPs dissipatives. On notera que la propriété Morse-Smale pour une EDP de type non gradient, obtenue dans [RJ3], est probablement unique parmi les EDPs, et est liée à la propriété de Poincaré-Bendixson pour (3.1) sur le cercle.

L'intérêt des résultats de généricité des propriétés de Kupka-Smale et de Morse-Smale, comme ceux de [RJ1], [RJ3] et [RJ4], est multiple :

- i) ces résultats prolongent ce qui était connu pour les équations différentielles en dimension finie au cas des EDP. Ils complètent donc le tableau des phénomènes dynamiques observables dans les différents modèles mathématiques, physiques et biologiques.
- ii) d'un point de vue pratique, ces résultats démontrent la stabilité générique locale ou globale de la dynamique qualitative de l'EDP. En particulier, on s'attend à avoir persistance des comportements dynamiques, même après certaines approximations provenant du modèle ou d'une simulation numérique.
- iii) certains résultats demandent que des conditions d'hyperbolicité ou de transversalité soient remplies. Par exemple, [49] permet de décrire la dynamique de l'équation parabolique (3.1) sur le cercle avec  $f \equiv f(u, \partial_x u)$ , mais uniquement sous l'hypothèse que tous les points d'équilibre et toutes les orbites périodiques soient hyperboliques. L'article [RJ4] montre que cette hyperbolicité est presque toujours vérifiée et donc que les résultats de [49] sont pertinents car valables dans presque toutes les situations.

Le tableau suivant a pour but de résumer ce qui est connu concernant la généricité des propriétés de Kupka-Smale et de Morse-Smale pour les équations paraboliques scalaires (3.1). A chaque fois, la généricité est entendue par rapport à la non-linéarité  $f \in \mathcal{C}^1$  et au sens de la topologie de Whitney. Le domaine  $\Omega$  est supposé régulier et la condition au bord de type Neumann ou Dirichlet.

|                         |                     | Dynamique de type gradient | Kupka-Smale générique | Morse-Smale générique |
|-------------------------|---------------------|----------------------------|-----------------------|-----------------------|
| $\Omega = ]0, 1[$       | $f(x, u, \nabla u)$ | OUI                        | OUI                   | OUI                   |
|                         | $f(u, \nabla u)$    |                            |                       |                       |
|                         | $f(x, u)$           |                            |                       |                       |
|                         | $f(u)$              |                            |                       |                       |
| $\Omega = \mathbb{T}^1$ | $f(x, u, \nabla u)$ | NON                        | OUI                   | OUI                   |
|                         | $f(u, \nabla u)$    |                            |                       |                       |
|                         | $f(x, u)$           | OUI                        | NON                   | NON                   |
|                         | $f(u)$              |                            |                       |                       |
| $\dim(\Omega) \geq 2$   | $f(x, u, \nabla u)$ | NON                        | OUI                   | NON                   |
|                         | $f(u, \nabla u)$    |                            | ???                   | NON                   |
|                         | $f(x, u)$           | OUI                        | OUI                   | OUI                   |
|                         | $f(u)$              |                            | NON                   | NON                   |

## 4 Outils principaux

Dans cette partie, nous allons discuter des points clefs et des outils utilisés dans les articles [RJ1], [RJ3] et [RJ4].

### 4.1 Théorème de Sturm et nombre de zéros

Toutes les propriétés extrêmement particulières à l'équation parabolique en dimension  $d = 1$  d'espace (voir parties 2.1, 2.2 et 2.3) proviennent de la propriété de décroissance du nombre de zéros des solutions de l'EDP linéaire. Le premier à avoir remarqué cette propriété est Sturm [140]. Depuis, elle a été redémontrée de nombreuses fois avec des hypothèses moins fortes, voir par exemple [101], [97] ou [5]. On trouvera plus de références sur cette propriété et ses applications dans les articles de revue [54], [50] et [RJ2]. Voici une version possible de cette propriété de Sturm.

**Théorème 3.1.** *Soit  $\Omega = ]0, 1[$ , soient  $T > 0$ ,  $a \in W^{1,\infty}(\overline{\Omega} \times [0, T], \mathbb{R})$  et  $b \in L^\infty(\overline{\Omega} \times [0, T], \mathbb{R})$ . Soit  $v : \overline{\Omega} \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  une solution classique, non triviale et bornée de*

$$\partial_t v = \partial_{xx}^2 v + a(x, t) \partial_x v + b(x, t) v \quad , \quad (x, t) \in \Omega \times ]0, T[ .$$

*avec des conditions aux bords de type Neumann ou des conditions p ériodiques (i.e.  $\Omega = \mathbb{T}^1$ ).*

*Alors, pour tout  $t \in ]0, T[$ , le nombre de zéros de la fonction  $x \in \overline{\Omega} \mapsto v(x, t)$  est fini et décroissant en temps. De plus, il décroît strictement en  $t = t_0$  si et seulement si  $x \mapsto v(x, t_0)$  a un zéro multiple.*

Pour illustrer comment le théorème 3.1 s'applique, nous allons démontrer la proposition suivante. Cette propriété est un des points clefs de [RJ4], comme nous allons le voir dans le paragraphe 4.3.

**Proposition 3.2.** *Soit  $p(x, t)$  une orbite périodique non triviale de l'équation parabolique (3.1) sur le cercle  $\Omega = \mathbb{T}^1$ , et soit  $T > 0$  sa période minimale. Alors, l'application*

$$(x, t) \in \mathbb{T}^1 \times [0, T[ \longmapsto (x, p(x, t), \partial_x p(x, t))$$

*est injective.*

**Démonstration :** Nous allons raisonner par l'absurde. Si l'application n'est pas injective, il existe  $x_0 \in \mathbb{T}^1$  et  $t_0$  et  $t_1 \in [0, T[$ ,  $t_0 \neq t_1$  tels que

$$p(x_0, t_0) = p(x_0, t_1) \quad \text{et} \quad \partial_x p(x_0, t_0) = \partial_x p(x_0, t_1) .$$

Mais alors,  $v(x, t) = p(x, t + t_1 - t_0) - p(x, t)$  est solution de

$$\partial_t v(x, t) = \partial_{xx}^2 v(x, t) + a(x, t)v(x, t) + b(x, t)\partial_x v(x, t) ,$$

avec  $a(x, t) = \int_0^1 f'_u(x, p(x, t) + s(p(x, t + t_1 - t_0) - p(x, t)), \partial_x p(x, t + t_1 - t_0)) ds$  et  $b(x, t) = \int_0^1 f'_{u_x}(x, p(x, t), \partial_x(p(x, t) + s(p(x, t + t_1 - t_0) - p(x, t)))) ds$ . Par construction,  $v$  est non triviale,  $T$ -périodique et  $v(x_0, t_0) = \partial_x v(x_0, t_0) = 0$ . D'après le théorème 3.1, le nombre de zéros de  $v(t)$  décroît en temps et décroît même strictement en  $t = t_0$  car  $x_0$  est zéro multiple. Vu que ce nombre de zéros doit être périodique, c'est absurde.  $\square$

Comme nous allons surtout discuter le problème de la transversalité des orbites homoclines ou hétéroclines, nous énonçons le résultat similaire suivant, tiré de [RJ3]. On rappelle que l'indice de Morse d'un point d'équilibre est le nombre de valeurs propres instables de la linéarisation de l'équation en ce point.

**Proposition 3.3.** *On considère le système dynamique engendré par l'équation parabolique (3.1) sur le cercle  $\Omega = \mathbb{T}^1$ . Soit  $u(x, t)$  une orbite hétérocline ou homocline entre deux équilibres hyperboliques  $e_{\pm}$  de même indice de Morse. Alors, l'application*

$$(x, t) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} \longmapsto (x, u(x, t), \partial_x u(x, t))$$

*est injective.*

## 4.2 Ensembles nodaux singuliers

Les propositions 3.2 et 3.3 sont des points importants pour obtenir la genericité de la propriété de Kupka-Smale (voir paragraphe 4.3 ci-dessous). Malheureusement, le théorème

3.1 étant caractéristique d'un domaine  $\Omega$  de dimension  $d = 1$ , ces propriétés ne sont pas directement généralisables en dimension  $d \geq 2$ . Pour obtenir des théorèmes similaires dans [RJ1], on utilise une étude fine des ensembles nodaux singuliers de l'équation parabolique linéaire.

**Théorème 3.4.** *Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$ . Soient  $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times I \times J, \mathbb{R})$  et  $b \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times I \times J, \mathbb{R}^d)$  des coefficients bornés. Soit  $v(x, t, \tau)$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^r$  ( $r \geq 1$ ) en  $\tau$  et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  en  $x$  et  $t$ , qui est une solution forte de*

$$v_t(x, t, \tau) = \Delta v(x, t, \tau) + a(x, t, \tau)v(x, t, \tau) + b(x, t, \tau) \cdot \nabla_x v(x, t, \tau) , \quad (3.5)$$

avec condition au bord de Dirichlet. Si  $v(\cdot, t, \tau) \not\equiv 0$  pour tous  $t \in I$  et  $\tau \in J$ , alors l'ensemble

$$\{(x_0, t_0) \in \Omega \times I \mid \text{il n'existe aucun } \tau \in J \text{ tel que } (v(x_0, t_0, \tau), \nabla v(x_0, t_0, \tau)) = (0, 0)\}$$

est générique dans  $\Omega \times I$ .

Des résultats similaires, mais sans le paramètre  $\tau$ , avaient déjà été démontrés dans [71] et [35]. Ce genre de résultat utilise fortement la structure parabolique de (3.1). La démonstration du théorème 3.4 se trouve dans [RJ1] et est inspirée des arguments de Hardt et Simon [73]. Comme conséquence, on obtient des propriétés un peu plus faibles que les propositions 3.2 et 3.3, mais pour  $\Omega$  de dimension quelconque.

**Proposition 3.5.** *Soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ . Soit  $p(t)$  une orbite périodique de (3.1) de période minimale  $T > 0$ . Alors, il existe un ouvert dense de points  $(x_0, t_0) \in \Omega \times \mathbb{R}$  tels que*

$$(x_0, p(x_0, t_0), \nabla p(x_0, t_0)) \neq (x_0, p(x_0, t), \nabla p(x_0, t)) \quad \text{si } t \notin t_0 + \mathbb{Z}T .$$

Soit  $u(t)$  une hétérocline connectant deux orbites périodiques  $p_\pm(t)$ . Alors, il existe un ouvert dense de points  $(x_0, t_0) \in \Omega \times \mathbb{R}$  tels que

- i)  $(x_0, u(x_0, t_0), \nabla u(x_0, t_0)) \neq (x_0, p(x_0, t), \nabla p(x_0, t)) \quad \forall t \neq t_0 ,$
- ii)  $(x_0, u(x_0, t_0), \nabla u(x_0, t_0)) \neq (x_0, p_\pm(x_0, t), \nabla p_\pm(x_0, t)) \quad \forall t \in \mathbb{R} .$

Nous allons voir dans le paragraphe suivant comment ces propriétés sont utilisées. On notera que l'application des résultats sur les ensembles nodaux singuliers de (3.1) pour démontrer la transversalité générique remonte en fait à [26], où un résultat de [71] est utilisé.

### 4.3 Méthodes de preuve de la transversalité générique

Pour démontrer qu'un système dynamique vérifie la propriété de Kupka-Smale ou de Morse-Smale, il faut montrer que les variétés stables et instables des points d'équilibre et

des orbites périodiques se coupent transversalement. Il existe plusieurs points de vue pour caractériser cette transversalité et montrer qu'elle est vérifiée génériquement.

- Comptage des dimensions. Dans un système dynamique engendré par une EDP dissipative comme (3.1), une variété instable  $W^u$ , d'un point d'équilibre ou d'une orbite périodique, est de dimension finie, et une variété stable  $W^s$  est de codimension finie. La transversalité de  $W^u$  et de  $W^s$  est donc équivalente à avoir

$$\text{codim}(W^s) = \dim(W^u) - \dim(W^u \cap W^s) . \quad (3.6)$$

Dans le cas d'une équation parabolique en dimension  $d = 1$ , ce comptage de dimensions est possible à l'aide du théorème 3.1. En effet, prenons par exemple un équilibre hyperbolique  $e_-$ ,  $u(t)$  une trajectoire de sa variété instable et  $v(0)$  un vecteur tangent à  $W^u(e_-)$  en  $u(0)$ . Ce vecteur  $v(0)$  est transporté sur  $T_{u(t)}W^u(e_-)$  par l'équation parabolique linéarisée et vérifie donc la propriété de décroissance du nombre de zéros. On peut montrer que, quand  $t$  tend vers  $-\infty$ ,  $v(t)$  tend forcément vers un vecteur propre instable de l'équilibre  $e_-$ . La théorie de Sturm-Liouville nous assure que le nombre de zéros de ce vecteur propre est borné par  $i(e_-) - 1$ , où  $i(e_-)$  est le nombre de valeurs propres instables de  $e_-$ , c'est-à-dire la dimension de  $W^u(e_-)$ . Le théorème 3.1 étend alors cette borne au nombre de zéros de  $v(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Un raisonnement similaire conduit à une borne inférieure pour le nombre de zéros de  $v(t)$  si celui-ci appartient en outre à l'espace tangent à une variété stable  $W^s(e_+)$ . Ces bornes vont permettre de compter la dimension maximale de  $W^u(e_-) \cap W^s(e_+)$  et vérifier (3.6) pour des équations parabolique en dimension  $d = 1$  d'espace. On obtient ainsi les résultats de transversalité automatique de [75], [4], [40] et [RJ3].

- Point de vue géométrique. Si la transversalité des variétés stables et instables n'est pas automatique, mais seulement générique, il faut utiliser des théorèmes de transversalités similaires à ceux du chapitre 2. Dans le cas standard des équations différentielles  $\dot{u}(t) = f(u(t))$ , l'approche a surtout été géométrique, avec des théorèmes de transversalité du type du théorème 2.15. Cette méthode est efficace s'il est possible de localiser la perturbation. Prenons l'exemple d'une trajectoire hétérocline  $u(t)$  d'une EDO  $\dot{u}(t) = f(u(t))$ . On peut perturber le champ de vecteurs  $f$  par un champ  $\varepsilon h$  localisé près d'un point  $u(t_0)$  (voir le cas i) de la figure 3.1). Il est ainsi raisonnable d'espérer comprendre comment les variétés stables et instables dépendent de perturbations  $h$  localisées et donc d'utiliser le théorème 2.15 avec  $\mathcal{M} = W^u(e_-)$  une variété locale instable,  $\mathcal{N} = W^s(e_+)$  une variété locale stable et  $\Phi = S_f(T)$  le flot après un temps  $T$ . C'est la méthode utilisée pour les EDO, voir [104]. On notera qu'il est important de savoir au minimum localiser la perturbation afin que  $\mathcal{M} = W^u(e_-)$  et  $\mathcal{N} = W^s(e_+)$  ne bougent pas quand  $f$  varie.

Dans le cas d'équations paraboliques (3.1), si on ajoute à la non-linéarité  $f$  une petite fonction  $\varepsilon h$ , la perturbation du « champ de vecteurs » est de la forme

$$u \in X^\alpha \longmapsto \varepsilon h(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot)) \in X^\alpha .$$

Cette perturbation n'est donc jamais localisée dans  $X^\alpha$ , puisque de nombreuses fonctions  $u$  ont les mêmes valeurs de  $u$  et  $\nabla u$  en  $x_0$  donné. On peut simplement espérer que la trajectoire  $u(t)$  que l'on considère ne voie cette perturbation  $\varepsilon h$  que dans un petit intervalle de temps  $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$  comme dans le cas ii) de la figure 3.1. C'est exactement à cela que servent les résultats du type des propositions 3.2, 3.3 et 3.5. Ainsi, dans [RJ1], on utilise le théorème 2.15 avec une perturbation localisée qui est construite grâce à la proposition 3.5. On notera que dans [RJ3], malgré la proposition 3.3, on a utilisé une approche fonctionnelle et non géométrique, pour des raisons historiques.

- Caractérisation fonctionnelle. Dès qu'on se trouve dans le cas iii) de la figure 3.1, il devient difficile d'utiliser une approche géométrique. En effet, si la perturbation agit en différents endroits de la trajectoire, il devient nécessaire de quantifier les différentes influences de la perturbation à ces endroits pour comprendre comment elles se combinent. En outre, l'utilisation de la version géométrique du théorème de Sard-Smale, c'est-à-dire le théorème 2.15, nécessite d'avoir des variétés  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  fixées. Cela devient difficile quand la perturbation agit en tout endroit et déplace aussi les équilibres, les orbites périodiques et leurs variétés stables et instables. Un des premiers articles où ce problème de perturbation non localisable est apparu est celui de Robbin [123], où la propriété de Kupka-Smale est obtenue génériquement dans la classe des EDO dont le champ de vecteurs est polynomial, de degré donné. Ce même problème s'est posé dans le cas des EDP, dès que la transversalité n'est pas automatique, en premier dans [26].

A la place du théorème 2.15, on utilise alors un théorème purement fonctionnel du type du théorème 2.9. Il faut donc caractériser la transversalité des variétés stables et instables comme le fait que 0 soit une valeur régulière d'une fonctionnelle  $\Phi(\cdot, \lambda)$ . Par exemple, le théorème de [26] est le suivant.

**Théorème 3.6.** *On considère l'équation parabolique (3.1) avec  $f \equiv f(x, u)$  et des conditions aux bords de Dirichlet. Le domaine  $\Omega$  est supposé régulier. Soit  $\delta \in ]0, 1 - \alpha[$  et soit  $U$  un ouvert de  $\mathcal{C}^{1,\delta}(\mathbb{R}, L^p(\Omega)) \cap \mathcal{C}^{0,\delta}(\mathbb{R}, W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega))$ . On suppose en outre que tous les équilibres de (3.1) sont hyperboliques.*

*Alors, toutes les trajectoires hétéroclines de (3.1) sont transverses si et seulement si l'application*

$$\Phi(\cdot, f) : u \in U \longmapsto \partial_t u - \Delta u - f(\cdot, u) \in \mathcal{C}^{0,\delta}(\mathbb{R}, L^p(\Omega))$$

*a 0 comme valeur régulière.*

Afin d'utiliser le théorème 2.9, il faudra aussi montrer que  $\Phi(\cdot, f)$  est une fonction de Fredholm, voir [26]. Cette propriété, comme le théorème 3.6, se démontre à l'aide des dichotomies exponentielles, voir [26], [65], et leurs références. Le point clef est ensuite de vérifier l'hypothèse (ii) du théorème 2.9, c'est-à-dire que la différentielle  $D\Phi(u, f) = D_u\Phi + D_f\Phi$  est surjective, avec  $u$  une solution hétérocline. De façon similaire à (2.3), on

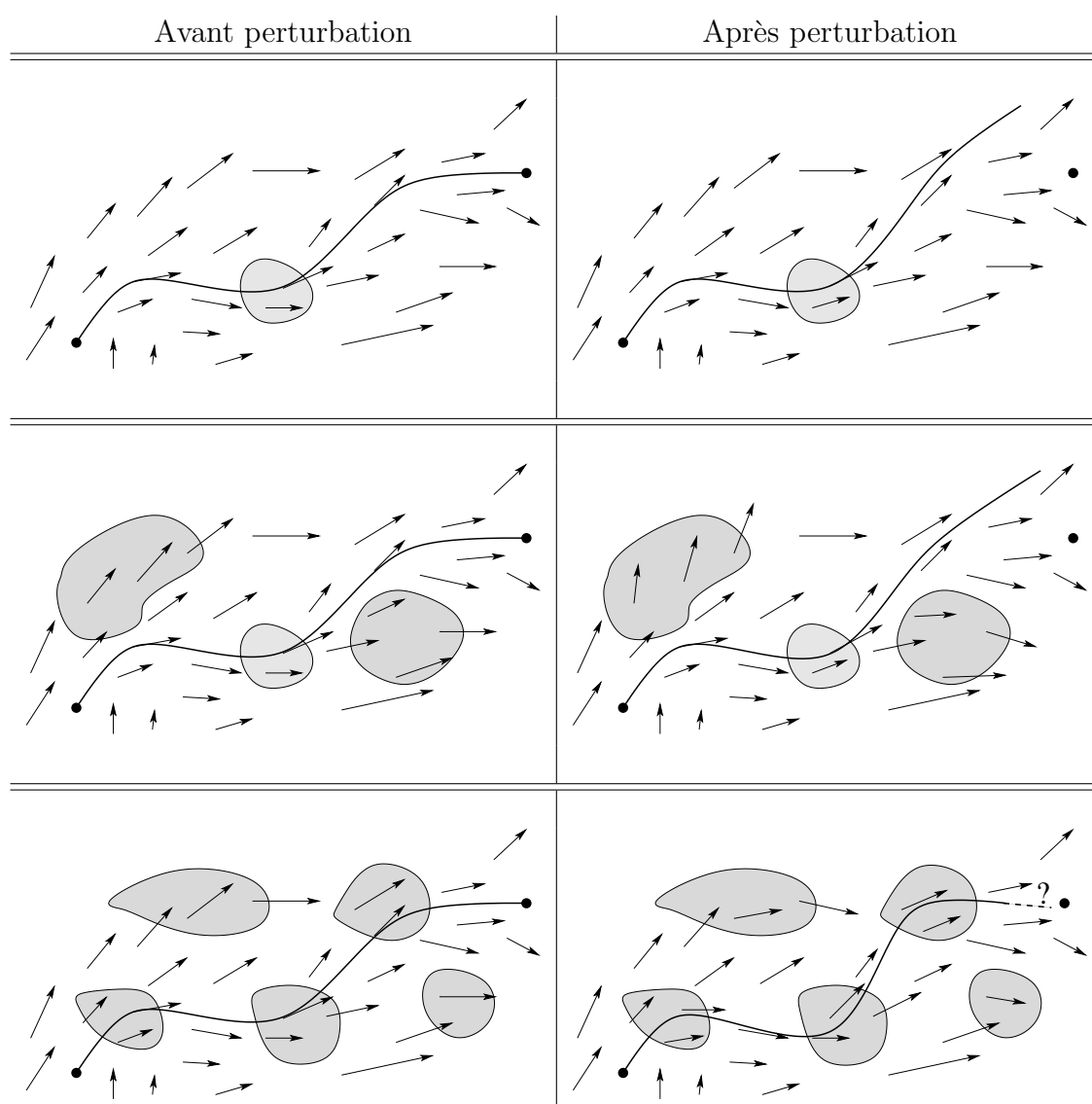


FIGURE 3.1 –

On regarde une connexion hétérocline entre deux équilibres. On souhaite, à l'aide d'une perturbation du champ de vecteurs, briser cette connexion. Trois cas sont possibles. De haut en bas :

- i) la perturbation est localisable en un endroit de l'espace. On peut relativement bien comprendre comment elle agit sur la trajectoire.
- ii) la perturbation agit simultanément en différents endroits, mais on peut se ramener au cas i) car l'hétérocline ne passe que dans un de ces endroits.
- iii) la perturbation agit sur plusieurs endroits de la trajectoire. Dans ce cas, il est difficile de comprendre les différentes influences sur la trajectoire et son comportement final.



va devoir montrer que l'on peut choisir une perturbation  $h$  de  $f$  telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} \psi(x, t) h(x, u(x, t)) \, dx dt \neq 0 \quad (3.7)$$

avec  $\psi$  une solution de l'équation parabolique adjointe (voir [26]). Comme on est dans le cas iii) de la figure 3.1, l'intégrale de (3.7) ne peut être localisée en temps et c'est ici que l'analyse fine de l'influence d'une perturbation de  $f$  est nécessaire.

Le théorème 3.6 est adaptable à d'autres EDP et aussi à une version en temps discret (qui évite les éventuels problèmes de régularité de  $\Phi$ ). C'est ce type de méthode qui a été utilisée dans les résultats de transversalité générique de [RJ3], et aussi de [27] et [80] dans le cadre des équations des ondes amorties.

Le problème de la caractérisation fonctionnelle est qu'elle devient trop technique dès que l'on regarde une trajectoire hétérocline ou homocline à une orbite périodique. En effet, il faut dans ce cas utiliser des trichotomies exponentielles et des problèmes techniques apparaissent. C'est pour cela que, dans [RJ1], nous sommes revenus aux méthodes géométriques qui étaient possibles dans ce cadre puisque l'on pouvait localiser les perturbations.

## 5 Quelques perspectives

En ce qui concerne les propriétés de Morse-Smale et Kupka-Smale pour les équations paraboliques scalaires, le tableau récapitulatif de la partie 3 montre que la généricité par rapport à la non-linéarité  $f$  est un problème (quasiment) clos par les derniers résultats [RJ1, RJ3, RJ4]. Pour beaucoup de modèles, en chimie ou biologie, il est aussi pertinent de regarder la généricité des propriétés de Morse-Smale et Kupka-Smale dans les systèmes d'EDP paraboliques

$$\partial_t U = \Delta U + F(x, U) \quad U(x, t) \in \mathbb{R}^k .$$

Dans ce cas, on peut naturellement espérer des propriétés d'injectivité comme celles de la proposition 3.5, c'est-à-dire montrer que  $(x, t) \mapsto (x, U(x, t))$  ne reprend quasiment jamais les mêmes valeurs. En effet, puisque  $t \mapsto U(x, t)$  est une courbe de  $\mathbb{R}^k$  avec  $k \geq 2$ , elle ne devrait pas se couper plus qu'en un nombre dénombrable de points (au moins génériquement). Mais une telle propriété reste à montrer. Il serait aussi intéressant de se restreindre à certaines classes d'équations paraboliques de la mécanique des fluides.

Toujours concernant la généricité des propriétés de Morse-Smale et Kupka-Smale par rapport à la non-linéarité, il est naturel de considérer d'autres EDP dissipatives. Le cas de l'équation des ondes amorties

$$\partial_{tt}^2 u + \gamma(x) \partial_t u = \Delta u + f(x, u)$$

a été traité dans [27] pour  $\gamma$  constant et dans [80] pour  $\gamma$  variable et  $\Omega$  de dimension 1. Le cas général  $\gamma$  non constant et  $\Omega$  de dimension quelconque reste ouvert. De même que celui des équations des ondes avec amortissement fort, celui des équations des plaques. . .

Dans les cas où la non-linéarité est une donnée rigide de l'équation (une force dans un modèle physique par exemple), il faut essayer d'obtenir des propriétés génériques par rapport à d'autres paramètres : la généricité par rapport au domaine  $\Omega$  est très souvent pertinente, ou bien la généricité par rapport à un amortissement dans une équation type ondes etc. Ce genre d'étude reste principalement ouvert, à part en ce qui concerne l'hyperbolicité des équilibres (voir par exemple [76] pour la généricité par rapport au domaine). Remarquons que, sans aller jusqu'aux problèmes de transversalité, l'hyperbolicité générique, ou plus simplement la non-dégénérescence générique, des orbites périodiques est déjà un objectif intéressant et difficile.

Un autre problème est celui de la stabilité générique quand la propriété de Morse-Smale n'est pas générique. Prenons par exemple le cas de l'équation parabolique (3.1) avec  $f \equiv f(u)$  sur un domaine du plan. Poláčik a montré dans [113] que la propriété de Morse-Smale n'était pas vérifiée génériquement par rapport à  $f$ , car certaines symétries ne peuvent être brisées en perturbant  $f(u)$ . Ceci n'est pas seulement dû à des continuums de points d'équilibres (par exemple des cercles d'équilibres si  $\Omega$  est un disque à cause de l'invariance par rotation). En effet, [113] donne un cas où une hétérocline ne peut être rendue transverse. Ce problème conduit à deux questions : peut-on obtenir la propriété de Morse-Smale génériquement par rapport à  $\Omega$  et  $f(u)$ ? Et, même si la propriété de Morse-Smale n'est pas vérifiée, peut-on montrer que la dynamique est génériquement stable quand on bouge le paramètre  $f$ ? Espérer la stabilité de la dynamique dans ce cas reste raisonnable, puisque, même si la propriété de Morse-Smale n'est pas vérifiée, on reste loin de comportements chaotiques.

Enfin, puisque tout est connu sur les propriétés de Morse-Smale et Kupka-Smale dans les équations paraboliques (3.1) avec  $f$  comme paramètre, on pourrait essayer de passer à l'étape suivante de l'étude de la dynamique. Dans le cadre des systèmes dynamiques de dimension finie, cette étape a été la démonstration du « closing lemma » de Pugh ([115]). C'est un point clef ouvrant sur une étude fine de la dynamique dans le cas où la propriété de Morse-Smale n'est pas vérifiée. La difficulté du closing lemma, c'est qu'il ne faut pas seulement savoir déplacer des trajectoires, ou des variétés stables et instables, dans une direction donnée, mais il faut savoir déplacer une trajectoire très précisément pour l'amener en un point donné. La démonstration va donc faire appel à des propriétés pointues de contrôle des EDP paraboliques, lesquelles restent à démontrer.

# Chapitre 4 : Dissipativité de l'équation des ondes amorties et application au contrôle global

On considère dans ce chapitre une équation des ondes amorties

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u + \gamma(x)\partial_t u = \Delta u + f(x, u) & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x, t) = 0 & (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ (u(\cdot, 0), \partial_t u(\cdot, 0)) = U_0 = (u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $\Omega$  est un domaine borné régulier de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\gamma \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+)$  quantifie l'amortissement des ondes et  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On s'intéressera au système dynamique  $S(t)$  engendré par (4.1) sur l'espace  $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

Bien entendu, (4.1) n'est qu'un cas particulier dans la classe des équations des ondes amorties : la dimension de  $\Omega$  pourrait être différente de 3,  $\Omega$  pourrait ne pas être borné, on pourrait prendre d'autres conditions aux bords, mettre de l'amortissement sur le bord et non à l'intérieur de  $\Omega$ , rendre l'amortissement non linéaire... Beaucoup de propriétés présentées ici seraient encore valables pour la plupart de ces généralisations. Toutefois, pour simplifier la discussion, nous nous limiterons au cas (4.1).

Les articles [RJ7] et [RJ8], coécrits avec Camille Laurent, sont consacrés à cette équation des ondes amorties : existence d'un attracteur, stabilisation et contrôle global. L'article [RJ6] considère aussi une équation des ondes amorties, mais sera discuté dans le chapitre suivant. Les articles [80, 81, 82], issus de ma thèse, concernent aussi cette équation.

## 1 Rappels sur les équations des ondes amorties

Comme pour tout système d'ordre deux, la véritable variable de (4.1) n'est pas  $u$  mais  $U = (u, \partial_t u) \in X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Si on pose

$$D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ \Delta & -\gamma \end{pmatrix} \quad F(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x, u) \end{pmatrix}$$

on peut réécrire l'équation des ondes amorties sous la forme

$$U(0) = U_0 \quad \text{et} \quad \forall t > 0, \quad \partial_t U(t) = AU(t) + F(U(t)). \quad (4.2)$$

Comme conséquence directe du théorème de Lumer-Phillips,  $A$  engendre un semi-groupe linéaire  $e^{At}$  de contractions sur  $X$  (voir [106]). En outre,  $e^{At}$  est un groupe défini globalement car  $\gamma$  est supposé borné. Puisque les ondes sont amorties dans le modèle, on s'attend à ce que, quand  $f \equiv 0$ , toutes les solutions convergent vers 0. Si cette convergence est uniforme, cela se traduit par l'estimation de décroissance exponentielle

$$\exists M > 0, \exists \lambda > 0, \forall t \geq 0, \|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{-\lambda t}. \quad (4.3)$$

Toutefois, cette décroissance uniforme n'est vérifiée que si l'amortissement  $\gamma \geq 0$  est non nul sur un domaine  $\omega \subset \Omega$  captant presque toutes les ondes acoustiques. En effet, dans leurs célèbres articles [14, 15], Bardos, Lebeau et Rauch ont montré que (4.3) est (quasiment) équivalent à avoir un amortissement efficace  $\gamma > 0$  sur un ouvert  $\omega$  vérifiant la condition de contrôle géométrique : il existe une longueur  $L$  telle que toute géodésique généralisée de  $\Omega$  de longueur  $L$  rencontre  $\omega$  (voir figure 4.1).

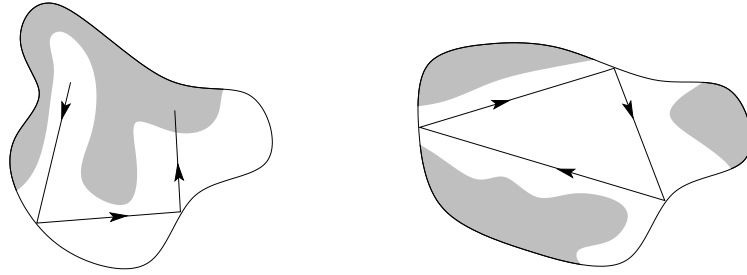


FIGURE 4.1 – Les géodésiques généralisées de  $\Omega$  sont les trajectoires droites rebondissant sur les bords selon la loi de Descartes. A gauche, un exemple où la condition de contrôle géométrique est vérifiée par  $\omega$  (en gris). A droite, un exemple où une trajectoire géodésique n'est jamais amortie.

Pour définir une solution à l'équation semi-linéaire (4.2) par la théorie standard (cf [106]), il suffit de supposer que  $F$  est lipschitzienne sur les bornées de  $X$ . Par l'injection de Sobolev  $H^1(\Omega) \rightarrow L^6(\Omega)$  en dimension 3, il suffit de supposer que  $f$  vérifie

$$\forall (x, u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}, |f(x, u)| \leq C(1 + |u|)^p \text{ et } |f'(x, u)| \leq C(1 + |u|)^{p-1} \quad (4.4)$$

avec  $p \in [0, 3]$ . On obtient alors l'existence locale et l'unicité des solutions de (4.2) (y compris en petits temps négatifs, ce qui implique en particulier l'unicité rétrograde). Ces solutions sont à prendre dans le sens intégral, c'est-à-dire satisfaisant

$$U(t) = e^{At}U_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}F(U(s)) ds. \quad (4.5)$$

On introduit alors l'énergie

$$E(U) = E(u, \partial_t u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} (|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2) + V(x, u) \right) dx ,$$

où  $V(x, u) = -\int_0^u f(x, s) ds$ . L'énergie  $E$  décroît, au sens large, le long des solutions  $U(t)$  de (4.2) puisque

$$\partial_t E(U(t)) = - \int_{\Omega} \gamma(x) |\partial_t u(x, t)|^2 dx \leq 0 .$$

Pour éviter que les solutions de (4.2) n'explodent, on suppose la condition de signe asymptotique

$$\limsup_{|u| \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \bar{\Omega}} \frac{f(x, u)}{u} < -\lambda_1 \quad (4.6)$$

où  $\lambda_1 < 0$  est la première valeur propre du laplacien de Dirichlet sur  $\Omega$ . Grâce à cette hypothèse, pour tout  $E_0 \in \mathbb{R}$ , il existe  $B, C > 0$  tel que

$$\forall (u, v) \in X, E(u, v) \leq E_0 \implies \frac{1}{C} \|(u, v)\|_X^2 - B \leq E(u, v) \leq C \|(u, v)\|_X^2 + B . \quad (4.7)$$

Autrement dit, contrôler l'énergie permet de contrôler la norme de la solution. En utilisant la décroissance de l'énergie, on obtient que pour tout borné  $B \subset X$ , il existe un borné  $B' \subset X$  tel que toute solution  $U(t)$  de (4.2) avec  $U_0 \in B$  reste dans  $B'$  pour tout  $t \geq 0$ . On a donc existence globale des solutions pour  $t \geq 0$ . On notera en outre que le lemme de Gronwall implique que l'énergie ne peut croître qu'au plus exponentiellement vite quand  $t \rightarrow -\infty$ . Au final, on a le résultat suivant.

**Théorème 4.1.** *Soit  $\gamma \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+)$  et soit  $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant (4.6) et (4.4) avec  $p \in [0, 3]$ . Alors, l'équation des ondes amorties (4.2) engendre un système dynamique  $S(t)$  sur  $X$  qui est un  $\mathcal{C}^0$ -groupe injectif défini pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .*

On peut noter qu'en fait l'énergie  $E$  est définie même si  $f$  vérifie (4.4) avec  $p \in ]3, 5]$ . Toutefois, la théorie standard des équations semi-linéaires ne s'applique pas dans ce cas, puisque  $F$  n'est pas définie de  $X$  dans  $X$ . L'idée pour construire des solutions est alors d'utiliser les inégalités de Strichartz pour profiter du fait que  $F$  n'intervient dans (4.5) que sous forme moyennée en temps, voir les articles originaux de Ginibre et Velo [59, 60] ou les livres [139, 141]. Les estimations de Strichartz dans notre cas où  $\Omega$  est un borné de  $\mathbb{R}^3$  proviennent de l'article [29] (voir aussi [22]). On obtient un théorème similaire au théorème 4.1.

**Théorème 4.2.** *Soit  $\gamma \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+)$  et soit  $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant (4.6) et (4.4) avec  $p \in ]3, 5]$ . Alors, l'équation des ondes amorties (4.2) engendre un système dynamique  $S(t)$*

sur  $X$  qui est un  $C^0$ -groupe injectif défini pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . En outre, pour tout  $E_0 \in \mathbb{R}$ ,  $T > 0$  et  $(q, r)$  vérifiant

$$\frac{1}{q} + \frac{3}{r} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad q \in [7/2, +\infty] , \quad (4.8)$$

il existe  $C > 0$  tel que toute solution  $U(t)$  avec  $E(U_0) \leq E_0$  vérifie  $\|u\|_{L^q(]0, T[, L^r(\Omega))} \leq C$ .

## 2 Existence d'un attracteur global compact

### 2.1 Contrôle, stabilisation et lien avec la notion d'attracteur

Le problème du contrôle de l'équation des ondes semi-linéaire est le suivant. Soit  $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant (4.4) avec  $p \in [0, 5]$  et soit  $\omega$  un ouvert de  $\Omega$ . Le contrôleur peut agir sur un système, modélisé par l'équation des ondes semi-linéaire, à l'aide d'un contrôle  $v \in L^1(\mathbb{R}_+, L^2(\omega))$  n'agissant que sur la portion  $\omega$  du domaine. L'état  $u$  du système suit alors l'équation

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x, t) - \Delta u(x, t) - f(x, u(x, t)) = \mathbb{1}_\omega v(x, t) & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u|_{\partial\Omega} \equiv 0 \\ (u, \partial_t u)(\cdot, 0) = U_0 \in X \end{cases} \quad (4.9)$$

La question est de savoir s'il existe un contrôle  $v$  permettant au contrôleur d'atteindre un but qu'il s'est fixé.

Le problème de la stabilisation peut être vu comme un cas particulier de contrôle. Imaginons que

$$\forall (x, u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} , \quad f(x, u)u \leq 0 , \quad (4.10)$$

ce qui implique que le système non contrôlé possède un équilibre  $u \equiv 0$ . Le contrôleur souhaite stabiliser le système vers zéro, c'est-à-dire trouver, pour chaque  $U_0 \in X$ , un contrôle  $v \in L^1(\mathbb{R}_+, L^2(\omega))$  tel que la solution de (4.9) tende vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . Pour ce faire, une bonne idée est de prendre pour  $v$  l'amortissement naturel  $v = -\gamma \partial_t u$  pour un certain  $\gamma \in L^\infty$  à choisir. On est donc ramené à montrer que toute solution  $u$  de l'équation des ondes amorties (4.1) tend vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$  pour  $f$  vérifiant (4.10).

La stratégie usuelle pour résoudre le problème de stabilisation est la suivante :

1. montrer que la trajectoire  $u$  tend vers quelque chose,
2. montrer que ce « quelque chose » est un point d'équilibre,
3. déduire de (4.10) que seul 0 est point d'équilibre,
4. éventuellement ajouter que les trajectoires proches de 0 tendent exponentiellement vite vers 0.

Le dynamicien traduit immédiatement cela en :

1. montrer que le système dynamique  $S(t)$  engendré par (4.1) est asymptotiquement compact,
2. montrer que  $S(t)$  est de type gradient,
3. déduire des points précédents et de (4.10) que  $S(t)$  possède un attracteur global compact  $\mathcal{A}$  qui est réduit à  $\{0\}$ ,
4. éventuellement ajouter que 0 est hyperbolique (et stable).

Du point de vue de la dynamique, il est dommage de se limiter au cas  $\mathcal{A} = \{0\}$  et donc on remplacera l'hypothèse (4.10) par (4.6) pour obtenir une dynamique plus riche. Reste que les deux points clefs, pour la stabilisation comme pour l'existence d'un attracteur, sont les étapes 1 et 2. Pour obtenir l'existence d'un attracteur global, on utilisera le théorème 1.10 du chapitre 1. Le fait que les trajectoires des bornés sont bornées vient de la décroissance de l'énergie et des bornes (4.7). La borne sur les point d'équilibre vient de (4.6). Les points importants sont donc la compacité asymptotique et la dynamique de type gradient, que nous allons détailler dans les paragraphes suivants. Des exemples de preuve d'existence d'attracteur global compact pour des équations des ondes amorties se trouvent dans [64] et [118].

On pourra retenir de cette discussion, que les problèmes de stabilisation d'équations semi-linéaires et d'existence d'attracteurs globaux compacts sont étroitement liés. Dans tout article étudiant la stabilisation de (4.9), on pourra trouver tous les outils pour déduire l'existence d'un attracteur pour (4.1), voir en particulier [151], [153], [42], [43] et [RJ8].

## 2.2 Compacité asymptotique

Pour montrer que le système dynamique  $S(t)$  engendré par l'équation des ondes amorties (4.1) est asymptotiquement compact, la façon la plus simple est de considérer la forme intégrale (4.5). Si  $\gamma$  vérifie la condition de contrôle géométrique de [15], alors le terme  $e^{At}U_0$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . Il suffit donc de montrer que le terme intégral est compact. Pour cela, on peut utiliser l'injection compacte  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  pour  $q < 6$  et supposer que  $f$  satisfait (4.4) avec  $p \in [0, 3[$ . La fonction

$$F : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ f(x, u) \end{pmatrix} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \quad (4.11)$$

est alors compacte, c'est-à-dire envoie les bornés de  $X$  sur des compacts de  $X$ . C'est l'argument clef des premières démonstrations de Hale [63] et Haraux [72] de l'existence d'un attracteur global compact pour une équation des ondes amorties.

Le cas  $p = 3$  a longtemps été considéré comme critique et a été l'objet de nombreux travaux (par exemple [10] et [9]). Toutefois, le théorème 4.2 montre que l'on peut aller au-delà de cet exposant 3 en utilisant les estimations de Strichartz.

Les premiers travaux pour  $p \in ]3, 5[$  ont été menés par Kapitanski [84] et Feireisl [44]. Les auteurs utilisent les estimations de Strichartz pour poser le problème de Cauchy (sur

une variété sans bord, mais c'est uniquement parce que les estimations adaptées au cas à bord ne seront prouvées dans [29] que plus tard). Afin d'obtenir la compacité asymptotique, les auteurs décomposent  $f$  sous la forme  $-|u|^{p-1}u + \text{reste compact}$  et utilisent la stabilisation dans le cas  $\tilde{f}(u) = -|u|^{p-1}u$ . Cette dernière peut se démontrer à l'aide d'une nouvelle fonctionnelle d'énergie, mais principalement dans le cas où  $\gamma(x) \geq \alpha > 0$  sur tout  $\Omega$ . Cette méthode, inspirée du critère de Ball dans [13], a aussi été utilisée dans [21] pour le cas critique  $p = 5$  et  $\gamma$  constant.

Dans le cas où  $p \in [3, 5[$  et où  $\gamma$  peut s'annuler sur une partie de l'ouvert, on va plutôt chercher à montrer que l'hypothèse  $p < 5$  permet de récupérer de la compacité pour  $f$  au travers des estimations de Strichartz et revenir simplement à la forme intégrale (4.5) pour obtenir la compacité asymptotique. Cette compacité de  $f$  pour  $p \in [3, 5[$  demande l'utilisation d'outils fins d'analyse, comme les multiplicateurs de Meyer. Le résultat suivant provient de l'article [43] de Dehman, Lebeau et Zuazua (dans sa version légèrement généralisée de [RJ8]).

**Théorème 4.3.** *Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant (4.4) avec  $p \in ]3, 5[$ . Soient  $R > 0$ ,  $T > 0$ ,  $s \in [0, 1[$  et  $\varepsilon = \min(1 - s, (5 - p)/2, (17 - 3p)/14) > 0$ . Si  $s + \varepsilon \geq 3/2$ , on supposera en outre que  $f(x, 0) = 0$  si  $x \in \partial\Omega$ .*

*Alors, il existe  $(q, r)$  satisfaisant (4.8) et  $C > 0$  tels que la propriété suivante soit vérifiée. Si  $v \in L^\infty([0, T], H^{1+s}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$  est une fonction avec une norme de Strichartz bornée  $\|v\|_{L^q([0, T], L^r(\Omega))} \leq R$ , alors  $f(\cdot, v)$  est dans  $L^1([0, T], H_0^{s+\varepsilon}(\Omega))$  et de plus*

$$\|f(\cdot, v)\|_{L^1([0, T], H_0^{s+\varepsilon}(\Omega))} \leq C \|v\|_{L^\infty([0, T], H^{s+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))} \quad (4.12)$$

(la constante  $C$  ne dépendant que de  $\Omega$ ,  $(q, r)$ ,  $R$  et de l'estimation (4.4)).

Le point clef est que, sur les solutions  $u(t)$  données par le théorème 4.2, (4.12) montre que la fonction  $F$  de (4.11) a gagné un cran  $\varepsilon > 0$  de régularité. Le terme intégral de (4.5) est donc compact dans  $X$  (on n'a pas besoin pour ce faire de supposer que  $f(x, 0) = 0$  sur le bord). En utilisant cet argument, on montre dans [RJ8] la compacité asymptotique suivante.

**Proposition 4.4.** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $\gamma \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+)$  un amortissement vérifiant la condition de contrôle géométrique de [15]. Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant (4.4) avec  $p \in [0, 5[$ . Soit  $(u_0^n, u_1^n)$  une suite de données initiales bornées dans  $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  et  $(u_n)$  les solutions de (4.1) correspondantes. Enfin, soit  $(t_n) \subset \mathbb{R}$  une suite de temps tendant vers  $+\infty$ .*

*Alors, il existe des sous-suites  $(u_{\phi(n)})$  et  $(t_{\phi(n)})$  et une solution globale  $u_\infty$  de (4.1) telles que*

$$\forall T > 0, \quad (u_{\phi(n)}, \partial_t u_{\phi(n)})(t_{\phi(n)} + \cdot) \longrightarrow (u_\infty, \partial_t u_\infty)(\cdot) \quad \text{dans } \mathcal{C}^0([-T, T], X) .$$



### 2.3 Dynamique de type gradient

La façon standard de montrer la structure gradient du système dynamique  $S(t)$ , engendré par l'équation des ondes amorties, est d'utiliser un théorème de prolongement unique. En effet, soit  $U(t)$  une trajectoire de  $S(t)$  dans  $X$  telle que l'énergie  $E(U(t))$  soit constante pour tout  $t \geq 0$ . Cela signifie que  $\partial_t u(x, t) \equiv 0$  sur le support  $\omega$  de  $\gamma$ . En posant  $w = \partial_t u$ , on obtient que

$$w \equiv 0 \text{ sur } \omega \quad \text{et} \quad \partial_{tt}^2 w = \Delta w + f'_u(x, u(x, t))w . \quad (4.13)$$

Pour montrer que  $u$  est forcément un équilibre, il suffit de montrer que toute solution  $w$  de (4.13) est partout nulle (non seulement sur  $\omega$ , mais sur tout  $\Omega$ ). La question est donc de savoir si une solution d'une équation des ondes linéaire peut rester nulle longtemps sur un ouvert  $\omega$  de  $\Omega$  sans pour autant être triviale. On sait par [2] qu'une solution non-triviale de (4.13) est possible, même si  $\omega$  est ouvert. En fait, il est naturel qu'une condition de type contrôle géométrique soit requise pour que chaque direction de l'onde rencontre la zone d'annulation (dans le cas inverse, cette direction ne verrait pas la différence avec une équation non amortie). Le premier résultat dans cette direction est celui de Ruiz [129] qui s'applique si  $\omega$  contient un voisinage du bord  $\partial\Omega$ . Toutefois, on peut se limiter à une partie suffisamment grande du bord d'après les travaux [85] et [90], dans le cas de conditions aux bords respectivement de Dirichlet ou de Neumann. Dans le cas du laplacien de Dirichlet, que nous considérons ici, la condition de [85] est la suivante :

$$\omega \text{ contient un voisinage d'une partie du bord du type } \{x \in \partial\Omega / (x - x_0) \cdot \nu > 0\} , \quad (4.14)$$

où  $x_0$  est un point de  $\mathbb{R}^3$  fixé et  $\nu$  la normale sortante au bord. Cette condition est plus forte que celle de contrôle géométrique, qui est pourtant la plus naturelle. Il existe un théorème de prolongement unique valable pour tout  $\omega$ , mais exigeant que  $w$  et le potentiel  $f'_u(x, u(x, t))$  dans (4.13) soient de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et analytique en temps. Ce résultat est une conséquence de l'article [122] de Robbiano et Zuily (voir aussi [78] et [142]), la mise en place de son application au cas de l'équation (4.13) étant détaillée dans [RJ8]. Afin d'appliquer ce prolongement unique analytique, il faut montrer que la solution  $u$  d'énergie constante est  $\mathcal{C}^\infty$  et analytique en temps, afin d'obtenir la même régularité pour  $w$  et  $f'_u(x, u)$ . L'idée, due à Hale et Raugel, est de montrer que si  $f$  est analytique en  $u$  et si  $f$ ,  $\gamma$  et  $\Omega$  sont  $\mathcal{C}^\infty$  en  $x$ , alors toute solution  $u(t)$  de (4.1) qui existe globalement et est uniformément bornée pour  $t \in \mathbb{R}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  en espace et analytique en temps. Il faut noter que l'équation des ondes amorties (4.1) ne régularise pas ses solutions en temps fini : il s'agit bien de régularisation asymptotique, en temps infini, voir [68]. L'idée de Hale et Raugel de combiner le prolongement unique [122] avec la régularisation asymptotique [68] a été appliquée pour la première fois dans [82] dans le cas classique  $p < 3$ . Dans [RJ8], on montre que cette idée s'applique aussi au cas  $p \in [3, 5[$  pour obtenir la stabilisation de l'équation des ondes avec la condition de contrôle géométrique. La mise en œuvre du résultat [68] demande

dans ce cas un peu de technique, par exemple l'utilisation en série du théorème 4.3 jusqu'à obtenir suffisamment de régularité sur  $u$  pour rentrer dans le cadre de [68], ou l'utilisation de bonnes troncatures quand on travaille sur un domaine non borné. On notera que si on ne s'intéresse qu'à la régularisation des trajectoires d'énergie constante, le coefficient  $\gamma$ , n'apparaissant pas dans (4.13), peut être pris simplement de régularité  $L^\infty$ .

## 2.4 Récapitulatif

D'après les discussions précédentes et en application du théorème 1.10, on obtient l'énoncé suivant.

**Théorème 4.5.** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $\gamma \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+)$  vérifiant la condition de contrôle géométrique de [15]. Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant (4.4) avec  $p \in [0, 5[$  et (4.6). On suppose en outre que l'on est dans l'un des deux cas :*

- a) soit  $\gamma$  est strictement positif sur un ouvert  $\omega$  vérifiant (4.14),*
- b) soit  $\Omega$  et  $f$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et  $f$  est analytique en  $u$ .*

*Alors le système dynamique  $S(t)$  engendré par l'équation des ondes amorties (4.1) est un système dynamique de type gradient qui a l'énergie  $E$  pour fonctionnelle de Lyapounov. En outre,  $S(t)$  admet un attracteur global compact  $\mathcal{A}$  et pour un ensemble générique de fonctions  $f$ ,  $\mathcal{A}$  est exactement composé d'un nombre fini de points d'équilibre et des hétéroclines les reliant.*

Ce résultat est généralisable au cas  $\Omega$  non borné, ou avec une métrique non plate (voir par exemple [44], [43] ou [RJ8]). La dernière remarque vient du fait que l'hyperbolicité des équilibres est générique par rapport à  $f$  (voir [26], les équilibres d'une équation parabolique ou d'une équation des ondes étant les mêmes et ayant un spectre lié).

L'apport de [RJ8] consiste donc au cas b) du théorème 4.5. En comparaison au cas a), on s'affranchit de toute hypothèse non naturelle sur la géométrie, au prix d'hypothèses fortes de régularité sur  $f$ . Mais l'intérêt de la collaboration avec Camille Laurent est aussi de se faire rencontrer des méthodes et des idées provenant de travaux de théorie du contrôle, comme le théorème 4.3 ci-dessus, et de travaux de dynamique des EDP, comme le concept d'attracteur et la régularisation asymptotique de Hale et Raugel [68].

## 3 Application au contrôle global de l'équation des ondes

Dans cette partie, nous allons nous intéresser au contrôle exact de l'équation des ondes semi-linéaire, c'est-à-dire au problème suivant : étant donnés  $U_0$  et  $U_1$  dans  $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  et un temps  $T > 0$ , est-il possible de trouver un contrôle  $v \in L^1((0, 1), L^2(\omega))$  tel que la solution  $U(t) = (u, \partial_t u)(t)$  de (4.9) vérifie  $U(T) = U_1$  ? Autrement dit, on cherche à contrôler la trajectoire  $U$  pour l'amener d'un point  $U_0$  à un autre point  $U_1$ .

Le lecteur intéressé par le problème du contrôle de l'équation des ondes pourra consulter par exemple [39], [94] ou [150]. On notera en particulier que le contrôle exact est résolu dans les cas suivants.

- Le cas linéaire, c'est-à-dire  $f(x, u) = V(x)u$ . Le résultat de Bardos, Lebeau et Rauch ([15, 14]) montre que le contrôle est possible pour tout  $U_0$  et  $U_1$  à condition que  $\omega$  vérifie la condition de contrôle géométrique illustrée par la figure 4.1 et que le temps  $T$  soit plus grand que la longueur  $L$  intervenant dans cette condition<sup>1</sup>.
- Le contrôle local. Supposons que  $E = (e(x), 0)$  est un équilibre de l'équation des ondes semi-linéaire et que  $\omega$  vérifie la propriété de contrôle géométrique. En linéarisant le problème au voisinage de  $E$ , on retrouve le cas linéaire précédent pour lequel le contrôle est possible. A l'aide d'une méthode de point fixe, on montre alors un résultat de contrôle local : il existe un voisinage  $\mathcal{N}$  de  $E$  tel que le contrôle exact est possible si  $U_0$  et  $U_1$  sont dans  $\mathcal{N}$ . Le temps de contrôle  $T$  est encore celui du contrôle linéaire. Voir [36] et [152].
- Le cas presque-linéaire, c'est-à-dire quand  $f$  est moralement linéaire, par exemple lipschitzienne. On obtient dans ce cas un contrôle global dans le sens où  $U_0$  et  $U_1$  peuvent être pris dans tout l'espace. La méthode repose en particulier sur des théorèmes de point fixe de type Leray-Schauder. On trouvera des résultats de ce type dans [89], [93], [154] et [39].
- Le cas stabilisable, c'est-à-dire quand  $f$  vérifie une condition de signe du type (4.10). A partir de résultats de stabilisation, comme [151], [43] ou [RJ8], on obtient facilement un résultat de contrôle global de la façon suivante. Partant d'un point  $U_0 \in X$ , on applique le contrôle  $v(x, t) = -\partial_t u(x, t)$  de telle sorte que la trajectoire contrôlée  $U$  suive une équation des ondes amortie et tende donc vers l'équilibre 0 par le résultat de stabilisation. Après un temps  $T_1$ , on arrive donc dans un voisinage  $\mathcal{N}$  de 0 dans lequel on connaît un résultat de contrôle local. On peut de même partir de  $\tilde{U}_1 = \mathcal{S}U_1$ , avec  $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , et obtenir une trajectoire amortie  $\tilde{U}$  qui, après un temps  $T_2$ , arrive dans  $\mathcal{N}$ . Par inversion du temps dans l'équation des ondes amorties, on notera qu'en partant de  $\mathcal{S}\tilde{U}(T_2)$  et en appliquant le contrôle  $v(x, t) = \partial_t \tilde{u}(T_2 - t)$  on arrive en  $U_1$  après un temps  $T_2$ . La stratégie pour aller de  $U_0$  à  $U_1$  est donc claire : on applique le contrôle  $v(x, t) = -\partial_t u(x, t)$  pendant un temps  $T_1$  pour arriver dans  $\mathcal{N}$ , puis on applique un contrôle local dans  $\mathcal{N}$  pendant un temps  $T$  pour aller en  $\mathcal{S}\tilde{U}(T_2)$  puis on remonte en  $U_1$  grâce au contrôle  $v(x, t) = \partial_t \tilde{u}(T_2 - \cdot)$ . On notera que cette méthode demande un temps de contrôle  $T_1 + T + T_2$  qui peut être grand, mais que l'on peut en général borner pour tout  $U_0$  et  $U_1$  pris dans une même boule de  $X$ .

Dans [RJ7], nous étudions le problème de contrôle (4.9), en nous inspirant des méthodes du cas stabilisable, mais en remplaçant la condition de signe (4.10) par la condition, plus faible, de signe asymptotique (4.6). Sous les hypothèses du théorème 4.5, l'équation des

---

1. On notera que cet abus de comparaison de variables inhomogènes n'est possible que parce qu'on a choisi une vitesse du son égale à 1 pour simplifier.

ondes amorties associées (4.1) admet un attracteur global compact  $\mathcal{A}$ , qu'on supposera composé de points d'équilibre et de trajectoires hétéroclines les reliant afin de simplifier la discussion qui suit (cette structure est générique, voir le théorème 4.5). Notons que le cas stabilisable (4.10) correspond à  $\mathcal{A} = \{0\}$ . Le point clef de [RJ7] est de montrer que le contrôle permet de voyager sur l'attracteur  $\mathcal{A}$  en suivant les hétéroclines et en effectuant des contrôles locaux près des points d'équilibre. Si  $U(t) = (u, \partial_t u)(t)$  est une hétérocline de (4.1), on peut passer de  $U(t_0)$  à  $U(t_0+T)$  en appliquant le contrôle  $v(x, t) = -\partial_t u(x, t_0+t)$ . Le point délicat est de passer de  $U(t_0)$  à  $U(t_1)$  quand  $t_1 < t_0$ . Pour cela, on sait que  $U$  tend vers deux équilibres  $E_{\pm}$  quand  $t$  tend vers  $\pm\infty$ . En outre, le contrôle local nous dit qu'il existe deux voisinages  $\mathcal{N}_{\pm}$  de  $E_{\pm}$  dans lesquels l'équation (4.9) est contrôlable localement. On supposera, sans perte de généralité, que ces voisinages sont symétriques i.e.  $\mathcal{S}\mathcal{N}_{\pm} = \mathcal{N}_{\pm}$ . On va de  $U(t_0)$  à  $U(t_1)$  comme suit. On applique le contrôle  $v(x, t) = -\partial_t u(x, t_0+t)$  jusqu'à un temps  $T_1$  pour lequel  $U(t_0+T_1) \in \mathcal{N}_+$ . Le contrôle local permet de passer de  $U(t_0+T_1)$  à  $\mathcal{S}U(t_0+T_1)$ . Puis, en appliquant le contrôle  $v(x, t) = \partial_t u(x, t_0+T_1-t)$ , on « remonte le temps » pour passer de  $\mathcal{S}U(t_0+T_1)$  à  $\mathcal{S}U(t_0+T_1-T_2)$  avec  $T_2$  assez grand pour que  $\mathcal{S}U(t_0+T_1-T_2) \in \mathcal{N}_-$ . Il reste alors à faire un contrôle local dans  $\mathcal{N}_-$  pour passer à  $U(t_0+T_1-T_2)$  et appliquer le contrôle classique  $v = -\partial_t u$  pour redescendre à  $U(t_1)$ . Cette stratégie en « double demi-tours » permet de se déplacer dans un sens ou dans l'autre le long de trajectoires hétéroclines. C'est l'argument clef de [RJ7] qui donne le théorème suivant.

**Théorème 4.6.** *Soit  $\omega, \gamma$  et  $f$  vérifiant l'un des ensembles d'hypothèses du théorème 4.5. Alors, pour toute boule  $\mathcal{B}$  de  $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , il existe un temps  $T_{\mathcal{B}}$  tel que, pour tout  $U_0$  et  $U_1$  dans  $\mathcal{B}$ , il existe  $T < T_{\mathcal{B}}$  et un contrôle  $v \in L^1((0, T), L^2(\omega))$  tels que la solution  $U$  de (4.9) vérifie  $U(T) = U_1$ .*

## 4 Quelques perspectives

Les articles [43] et [RJ8] autorisent le domaine  $\Omega$  à être non borné, mais supposent que  $\gamma \geq \alpha > 0$  en dehors d'un compact. Cette condition paraît trop forte et il est naturel de penser que si  $\gamma$  vérifie la condition de contrôle géométrique et est périodique (ou quasi-périodique), alors la stabilisation a encore lieu. Toutefois, ce cas ne semble pas avoir été étudié dans la littérature, même dans le cas linéaire.

Les méthodes de [43] et [RJ8] utilisent fortement la compacité engendrée par le fait que  $f$  est sous-critique pour l'énergie, c'est-à-dire vérifie (4.4) avec  $p < 5$ . On pourrait espérer aller jusqu'au cas critique  $p = 5$ , par exemple en s'inspirant des méthodes de [92] qui utilisent la décomposition en profils de Bahouri et Gérard ([11]).

Enfin, on peut regarder la version stochastique du problème de stabilisation de l'équation des ondes, c'est-à-dire rajouter une perturbation de type bruit blanc additif à (4.1). On peut s'attendre alors à ce que, presque sûrement, aucune trajectoire ne voie les singularités dégénérées de l'énergie (i.e. les éventuelles solutions non nulles qui sont d'énergie constante)

et donc que toute trajectoire tende vers 0. Autrement dit, on peut espérer une version du résultat de [RJ8] qui n'ait pas besoin de l'analyticité de  $f$  et qui ne conserve donc que les hypothèses naturelles. Un des points délicats sera par contre de trouver la bonne notion de stabilisation, puisqu'on ne pourra pas avoir de convergence vers 0 au sens fort (le bruit blanc additif renvoyant presque sûrement toute trajectoire en dehors de toute boule à un moment ou un autre).



# Chapitre 5 : Étude de fronts dans des EDP dissipatives

Ce chapitre concerne l'article [RJ6], coécrit avec Thierry Gallay, et l'article [RJ5] coécrit avec Guillemette Chapuisat.

## 1 Introduction

Ce chapitre est consacré aux solutions de type « fronts » dans les EDP dissipatives définies sur  $\mathbb{R}^d$ . La notion de front n'a pas de définition précise universellement établie, mais on peut retenir les principes suivants. Un front est une solution de l'EDP composée d'un profil  $h$  qui se déplace à vitesse  $c \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . En outre, le profil  $h$  doit relier deux états stationnaires différents de l'EDP en avant et en arrière du front (on dit qu'un état envahit l'autre). Enfin, on exige souvent d'un front qu'il soit monotone dans la direction de propagation et respecte les symétries du milieu (périodicité, symétrie dans certaines directions...). Le plus simple est de considérer les deux types de fronts qui sont étudiés dans les articles [RJ5] et [RJ6] et présentés dans la figure 5.1.

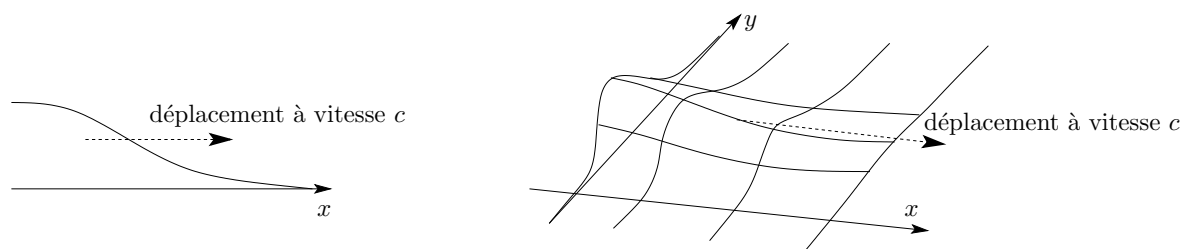


FIGURE 5.1 – A gauche : dans l'article [RJ6], on considère des fronts de la forme  $u(x, t) = h(x - ct)$  où le profil  $h \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  relie l'état 0 à l'état 1. A droite : dans l'article [RJ5], on considère des fronts de la forme  $u(x, y, t) = h(x - ct, y)$  où le profil  $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  relie l'état 0 à un état non trivial de la forme d'une bosse.

Les solutions de type fronts apparaissent naturellement dans de nombreux problèmes de propagation : invasion d'un milieu par une espèce animale, invasion d'un génotype dans

une population, propagation d'une réaction chimique, propagation d'une flamme dans une réaction de combustion. . .

Les problèmes d'étude des fronts peuvent se ranger en trois niveaux :

- montrer l'existence de solutions de type front ayant les propriétés souhaitées. Notons que l'existence d'une solution de type front correspond en fait à l'existence de toute une famille de fronts puisque si  $u(x, t) = h(x - ct)$  est solution d'une EDP autonome, alors la solution translatée  $u_{t_0} = h(x - c(t + t_0))$  est aussi une solution de type front.
- montrer qu'une famille de fronts est stable localement, c'est-à-dire qu'une solution  $u(t)$ , initialement proche du profil d'un des fronts, converge vers la famille de solution  $(u_{t_0})$  quand  $t$  croît (les notions de proximité et de convergence étant à préciser en fonction du problème). La stabilité locale a pour but de montrer que la famille de fronts considérée peut raisonnablement apparaître dans des problèmes concrets.
- montrer qu'une famille de fronts est stable globalement, c'est-à-dire qu'on s'autorise cette fois de très grandes perturbations du front. Le but est de montrer que la famille de fronts apparaît dans toutes les invasions d'un état par un autre. On peut en outre étudier les conditions de départ minimales pour qu'un état commence à envahir un autre (voir figure 5.2).

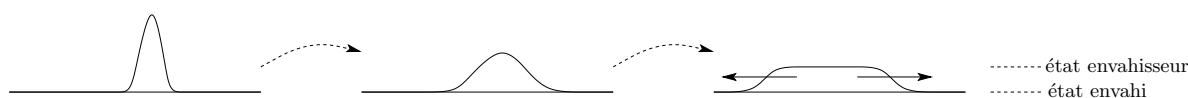


FIGURE 5.2 – De gauche à droite, une large excitation de l'état initial se développe en une invasion par un autre état sous forme de deux fronts se propageant à droite et à gauche.

On peut classer les problèmes de fronts en deux grandes catégories (voir figure 5.3) :

- Le cas **bistable** quand les deux états reliés par le front sont asymptotiquement stables. Dans ce cas, l'état envahi étant stable, il ne va pas spontanément se déstabiliser dans l'état envahisseur. La déstabilisation arrive avec le front et sa transition vers l'état envahisseur plus stable. On parle de **front poussé**, la transition étant la conséquence d'informations venant de l'arrière du front. Ce type de front a typiquement une vitesse et un profil uniques pour un milieu donné.
- Le cas **monostable** quand l'état envahi est instable et l'état envahisseur asymptotiquement stable. Si la vitesse de l'instabilité linéaire de l'état envahi est plus faible que la vitesse de propagation de l'état envahisseur en arrière du front, on pourra retrouver un front de type poussé. Toutefois, l'état instable pouvant se déstabiliser par lui-même dans le cas monostable, la transition entre états peut se faire sans attendre l'arrivée massive de l'état envahisseur et il n'y a pas forcément besoin de transfert d'informations entre l'arrière et l'avant du front. On parle de **front tiré**. Dans un même système, les fronts de ce type peuvent avoir des profils et vitesses très



différents, et même des vitesses plus grandes que celle de l'information dans l'EDP considérée (vitesses supersoniques dans l'équation des ondes par exemple).

Pour mieux comprendre la différence subtile entre fronts poussés et tirés, on pourra lire [58]. Il existe aussi des cas dits **de combustion** qui sont une dégénérescence du cas bistable : l'état envahi est stable mais pas asymptotiquement stable (ou bien l'état envahi est instable mais sur une échelle de temps trop longue pour entrer en jeu). On pourrait aussi considérer des fronts entre deux états instables, mais ils ne seraient éventuellement observables dans la nature que lors de courtes phases de transition.

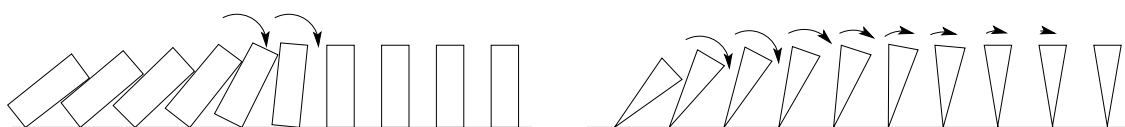


FIGURE 5.3 – Deux fronts de chutes de dominos. A gauche, on est dans une situation bistable (la position verticale du domino est stable) et le front est un front poussé : la chute des dominos ne se fait qu'à cause de l'arrivée du front de chute par la gauche. A droite, on est dans une situation monostable (la position verticale est instable). En ajustant bien les dominos au départ dans une position très proche de la verticale, chaque domino chute et l'ensemble de ces chutes forme un profil se déplaçant à vitesse constante, c'est-à-dire un front. Il s'agit d'un front tiré car la chute d'un domino n'est pas provoquée par un contact avec les autres, une information venant de la gauche, mais seulement par le comportement local du domino, connu bien avant l'arrivée du front. La vitesse d'un tel front peut être aussi grande que voulue.

Les articles [RJ5] et [RJ6] étudient des fronts poussés dans le cadre bistable. Ce chapitre sera donc principalement concentré sur ce type de fronts.

## 2 Fronts dans les équations paraboliques scalaires

Les premières études qui nous intéressent concernent l'équation parabolique scalaire en dimension un

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = \partial_{xx}^2 u(x, t) - V'(u(x, t)) & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (5.1)$$

Pour fixer les notations, on s'intéressera aux fronts reliant l'équilibre envahi 0 et l'équilibre envahisseur 1, c'est-à-dire qu'on suppose que  $V'(0) = V'(1) = 0$  et que l'énergie  $V(1)$  est plus faible que l'énergie  $V(0)$ . Les cas bistables et monostables se traduisent comme dans la figure 5.4.

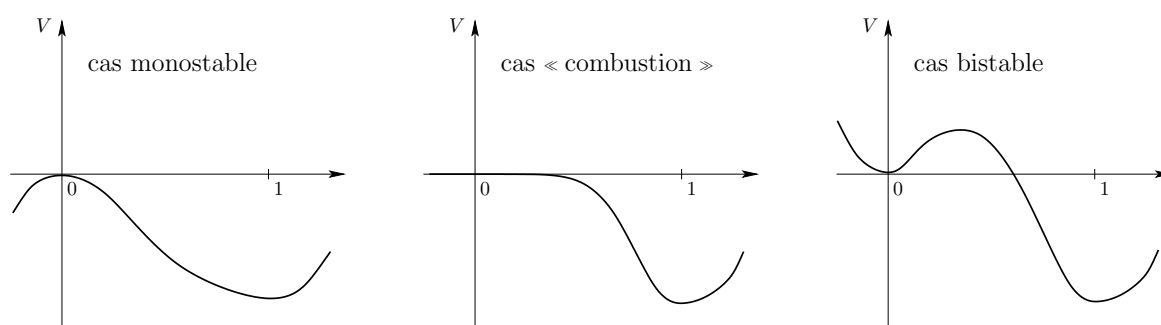


FIGURE 5.4 – Trois cas typiques pour le potentiel  $V$ . A gauche, le cas monostable où l'état 0 est instable. A droite, le cas bistable, où 0 et 1 sont tous les deux asymptotiquement stables. Au centre, le cas intermédiaire de type combustion où 0 n'est que stable.

L'équation (5.1) peut servir à modéliser la propagation d'un gène dans une population animale, l'invasion d'un milieu par une espèce animale, la propagation d'un signal dans l'axone d'un neurone, la propagation d'une réaction de combustion (voir l'article [7] et ses citations).

Le travail fondateur du domaine est l'article [87] de Kolmogorov, Petrovskii et Piskunov, parallèle à celui de Fisher [52].

**Théorème 5.1.** *On considère l'équation parabolique (5.1) avec un potentiel  $V$  monostable vérifiant  $V'(u) < 0$  pour  $u \in ]0, 1[$  et  $V''(u) \geq V''(0)$  pour  $u \in [0, 1]$ . Il existe une vitesse  $c_* > 0$  telle que, pour tout  $c \geq c_*$ , il existe un unique profil  $h_c$  tel que le front  $h_c(x - ct)$  soit solution de (5.1). En outre, la solution  $u$  de (5.1), avec pour donnée initiale  $u_0 = \chi_{]-\infty, 0]}$  tend vers le front de vitesse minimale  $h_{c_*}$  dans le sens où il existe une fonction  $\phi$  vérifiant  $\phi'(t) \rightarrow c_*$  quand  $t \rightarrow +\infty$  (et donc  $\phi(t) \sim c_*t$ ) et telle que*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, t) - h(x - \phi(t))| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 .$$

Un des points remarquables du travail de Kolmogorov, Petrovskii et Piskunov est de désigner le front  $h_{c_*}$  comme le front pertinent dans les phénomènes d'invasion. Les autres fronts  $h_c$  avec  $c > c_*$  sont des fronts tirés et sont moins intéressants du point de vue de la modélisation.

L'étude du cas bistable (ou de type combustion) a été initiée par Kanel. Dans [83], il montre en particulier le résultat suivant.

**Théorème 5.2.** *On considère l'équation parabolique (5.1) avec un potentiel  $V$  bistable. Il existe une unique vitesse  $c_* > 0$  et un unique profil  $h$  telle que le front  $h(x + x_0 - c_*t)$  soit solution de (5.1). En outre, si  $u$  est solution de (5.1) avec pour donnée initiale  $u_0$  telle que*

$u_0(x) = 1$  pour  $x$  près de  $-\infty$  et  $u_0(x) = 0$  pour  $x$  près de  $+\infty$ , alors il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, t) - h(x + x_0 - c_* t)| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 .$$

La stabilité globale des fronts dans le cas bistable a aussi été étudiée indépendamment par Fife et McLeod (voir [51] par exemple). On remarque que le comportement des propagations dans le cas bistable est simple à énoncer : il existe une unique vitesse de propagation et une unique famille de fronts, qui sont des fronts de type poussés ; en outre toute solution reliant 0 à 1 converge asymptotiquement vers un des fronts. À l'inverse, le comportement dans le cas monostable est plus complexe. La présence d'une infinité de familles de fronts aux vitesses différentes montre que la convergence vers un front donné ne peut se faire qu'en sélectionnant un bon comportement en avant du front (espaces à poids ou estimation de la vitesse de convergence vers 0 en  $+\infty$ ). En outre, la convergence ne se fait pas forcément vers un unique front, mais glisse le long de la famille de fronts. Ainsi, les résultats de [24] et [91] précisent le théorème 5.1 de la façon suivante.

**Théorème 5.3.** *On considère l'équation parabolique (5.1) avec un potentiel  $V$  monostable vérifiant  $V'(u) < 0$  pour  $u \in ]0, 1[$  et  $V''(u) \geq V''(0)$  pour  $u \in [0, 1]$ . La vitesse  $c_*$  du théorème 5.1 vaut  $2\sqrt{-V''(0)}$  et pour toute solution  $u$  de (5.1), avec une donnée initiale  $u_0 \in C^0(\mathbb{R}, [0, 1])$  vérifiant*

$$\liminf_{x \rightarrow -\infty} u_0(x) > 0 \quad \text{et} \quad \int_0^\infty x e^{\frac{c_*}{2}x} u_0(x) dx < \infty$$

il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| u(x, t) - h_{c_*} \left( x + x_0 - c_* t + \frac{3}{2} \ln t \right) \right| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 .$$

Dans tout ce qui précède, nous avons regardé des fronts dans des milieux rectilignes, c'est-à-dire  $x \in \mathbb{R}$ . Il est bien sûr intéressant de considérer des fronts dans des espaces de plus grande dimension. Les domaines les plus similaires au cas linéaire sont les domaines cylindriques du type  $x \in \mathbb{R} \times \Omega$  avec  $\Omega \subset \mathbb{R}^{d-1}$  borné, voir par exemple les travaux de Berestycki et Nirenberg [16, 17]. Dans le cas  $x \in \mathbb{R}^d$ , on peut bien sûr étendre transversalement les fronts du cas linéaire  $x' \in \mathbb{R}$  pour obtenir des fronts plans. Mais on peut aussi obtenir des fronts courbes avec des profils très variés, bien plus caractéristiques de la dimension  $d = 2$  ou plus : ondes sphériques, ondes coniques... De nombreux travaux récents se sont penchés sur les fronts de propagation de ce type, et il est impossible de les citer tous ici. On pourra consulter par exemple [148], [69] et l'introduction de [128], ainsi que les articles reliés.

### 3 Obtenir la stabilité globale des fronts grâce à une famille de fonctionnelles de Lyapounov

Dans tous les travaux cités jusqu'à présent, les stabilités globales de fronts étaient obtenues dans des équations paraboliques scalaires, en faisant un large usage du principe du maximum. Dans son article novateur [121], Risler a introduit des techniques permettant d'obtenir la stabilité globale des fronts sans utiliser le principe du maximum et les a appliquées à un système d'équations paraboliques de la forme

$$\begin{cases} \partial_t U(x, t) = \partial_{xx}^2 U(x, t) - \nabla V(U(x, t)) & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad U(x, t) \in \mathbb{R}^d \\ U(\cdot, 0) = U_0 \end{cases} \quad (5.2)$$

où  $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  est un potentiel et où la variable  $U(x, t)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^d$ . La structure importante nécessaire aux techniques de [121] est l'existence d'une famille de fonctionnelles de Lyapounov dans tous les référentiels galiléens. Si  $U$  est une solution de (5.2), alors  $U_c(y, t) = U(y + ct, t)$  est la solution vue dans le référentiel à vitesse  $c > 0$  et  $U_c$  satisfait l'équation

$$\partial_t U_c(y, t) = \partial_{yy}^2 U_c(y, t) + c \partial_y U_c(y, t) - \nabla V(U_c(y, t)) . \quad (5.3)$$

On constate alors que l'énergie

$$\mathcal{E}_c(W) = \int e^{cy} \left( \frac{1}{2} |\nabla W(y)|^2 + V(W(y)) \right) dy \quad (5.4)$$

est une fonctionnelle de Lyapounov pour la solution dans le référentiel galiléen se déplaçant à vitesse  $c$ , puisque

$$\partial_t \mathcal{E}_c(U_c(t)) = - \int e^{cy} |\partial_t U_c(y, t)|^2 dy .$$

Cette structure variationnelle particulière avait déjà été utilisée par Muratov dans [99] pour étudier les fronts dans un cylindre (voir aussi [100] et les références de cet article). Outre les équations et systèmes paraboliques, une telle famille de fonctionnelles de Lyapounov se retrouve dans l'équation des ondes amorties ([RJ6] et [95]) ou dans le flot harmonique ([19]).

Dans [RJ6], nous montrons la stabilité globale des fronts de l'équation des ondes amorties

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(x, t) + \gamma \partial_t u(x, t) = \partial_{xx}^2 u(x, t) - V'(x, u(x, t)) & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ (u(\cdot, 0), \partial_t u(\cdot, 0)) = (u_0, u_1) \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}) \end{cases} \quad (5.5)$$

où  $\gamma > 0$  est un amortissement constant et où  $V$  est un potentiel régulier bistable possédant seulement trois équilibres : 0 et 1, qui sont stables, et  $\theta \in ]0, 1[$  qui est instable. En outre,

on suppose que  $\liminf_{|u| \rightarrow +\infty} V''(u) > 0$  et que  $V(\theta) > V(0) = 0 > V(1)$  (cas bistable de la figure 5.4). Les espaces  $\mathcal{C}_b^k(\mathbb{R})$  apparaissant dans (5.5) sont définis par  $\mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}) = \{u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}), \forall i = 0, \dots, k \ \|u^{(i)}\|_{L^\infty} < \infty\}$  (en fait, [RJ6] utilise les espaces de Sobolev uniformément locaux  $H_{ul}^1(\mathbb{R}) \times L_{ul}^2(\mathbb{R})$ , mais nous allons simplifier l'énoncé de notre résultat sur ce point, entre autres). En écrivant l'équation vérifiée par un front de (5.5) et en faisant le lien avec celle vérifiée par un front de (5.1), on s'aperçoit qu'il existe une unique famille de fronts pour (5.5) qui sont donnés par

$$\tilde{u}(x, t) = h \left( \sqrt{1 + \gamma c_*^2} x - c_* t + x_0 \right)$$

où  $h$  et  $c_*$  correspondent à l'unique famille de fronts introduite dans le théorème 5.2. Le résultat principal de [RJ6] s'énonce comme suit.

**Théorème 5.4.** *Il existe  $\delta > 0$  tel que, pour toute donnée initiale  $(u_0, u_1) \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$  vérifiant*

$$\limsup_{x \rightarrow -\infty} (|u_0(x) - 1| + |u_0'(x)| + |u_1(x)|) \leq \delta \quad \text{et} \quad \limsup_{x \rightarrow +\infty} (|u_0(x)| + |u_0'(x)| + |u_1(x)|) \leq \delta ,$$

*il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que la solution  $u$  de (5.5) vérifie*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| u(x, t) - h \left( \sqrt{1 + \gamma c_*^2} x - c_* t + x_0 \right) \right| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 .$$

Le théorème 5.4 montre donc la stabilité globale des fronts dans une équation des ondes amorties en dimension un d'espace, comme le théorème 5.2 le fait pour l'équation parabolique scalaire. Il s'ajoute aux rares cas où cette stabilité est connue malgré l'absence de principe du maximum. Un des intérêts principaux du travail [RJ6] est aussi de revoir les techniques « à la Rislér », de proposer plusieurs alternatives aux choix de la démonstration de [121] et de simplifier certains des arguments. Comme [55], l'article [RJ6] a donc pour ambition de rendre les idées de [121] plus accessibles pour de futurs emplois.

Les preuves de [121], [55] et [RJ6] suivent un schéma commun qui se décompose selon les étapes suivantes.

1. **Mise en place du cadre fonctionnel.** Il faut bien sûr commencer par introduire la bonne famille de fonctionnelles de Lyapounov liées aux référentiels galiléens, par exemple la famille  $(\mathcal{E}_c)$  ci-dessus dans le cas des systèmes paraboliques. Dans le cas de [RJ6] et du théorème 5.4, on pose  $u_c(y, t) = u((y + ct)/\sqrt{1 + \gamma c^2}, t)$  et

$$\mathcal{E}_c(u_c, \partial_t u_c) = \int e^{cy} \left( \frac{\gamma}{2} |\partial_t u_c(y)|^2 + \frac{1}{2} |\partial_x u_c(y)|^2 + V(u_c(y)) \right) dy . \quad (5.6)$$

L'énergie  $\mathcal{E}_c$  est bien (au moins formellement) une fonctionnelle de Lyapounov puisque

$$\partial_t \mathcal{E}_c(u_c(t)) = -(1 + \gamma c^2) \int e^{cy} |\partial_t u_c(y, t)|^2 dy .$$

Le problème est que ces fonctionnelles ne sont pas forcément définies sur l'espace des solutions qui nous intéressent. Par exemple, les énergies  $\mathcal{E}_c$  ci-dessus ne sont définies que pour des fonctions  $u$  décroissant très rapidement vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Pour remédier à ce problème, on peut commencer par ne considérer que des solutions ayant cette propriété (c'est le cadre simple choisi dans [55]). Pour pouvoir considérer des fonctions plus générales, on peut soit modifier la fonctionnelle  $\mathcal{E}_c$  (choix de [121]), soit ne considérer  $\mathcal{E}_c$  que sur une troncature de la solution complète (choix de [RJ6]). Dans ces derniers cas,  $\mathcal{E}_c$  n'est plus une vraie fonctionnelle de Lyapounov du système (5.3) et il faut trouver des techniques pour contrôler ses possibles phases de croissance.

2. **Contrôler le déplacement de l'invasion.** Pour repérer le lieu où l'état 0 commence à se faire envahir par l'état 1, Risler introduit un « point d'invasion »  $\bar{x}(t)$ . Dans le cadre de [55] ou de [RJ6], ce point d'invasion est défini par

$$\bar{x}(t) = \sup\{x \in \mathbb{R} , |u(x, t)| \geq \varepsilon\} ,$$

où  $\varepsilon \in ]0, 1[$  est tel que  $] - \varepsilon, \varepsilon[$  soit inclus dans le bassin d'attraction de 0 pour le potentiel  $V$ . Le déplacement de ce point peut être discontinu, ce qui n'est pas le cas du point d'invasion défini par Risler dans [121], qui est par contre plus difficile à manier. Pour montrer qu'une invasion se produit, il faut montrer que  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \bar{x}(t)/t > 0$ . C'est grosso-modo une hypothèse de départ pour le cadre très général de [121]. Dans le cas du théorème 5.4, les arguments de [55] et [RJ6] permettent de démontrer que l'invasion se produit si  $u_0$  est proche de 1 en  $-\infty$ . Il s'agit d'un exemple simple d'utilisation des fonctionnelles  $\mathcal{E}_c$ . Plaçons nous dans le cadre du théorème 5.4. Si  $c > 0$  est tel que  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \bar{x}(t)/t < c$ , alors il existe une suite de temps  $(t_n) \rightarrow +\infty$  telle que, dans le référentiel se déplaçant à vitesse  $c$ , le point d'invasion part vers  $-\infty$  et la partie de  $u_c$  à gauche du point d'invasion devient d'importance négligeable dans l'énergie (5.6) à cause du poids exponentiel. Or, à droite du point d'invasion,  $u_c$  est tel que  $V(u_c) \geq 0$ , et donc cette partie de l'énergie est positive. Sur la suite de temps  $(t_n)$ , l'énergie  $\mathcal{E}_c(u_c(t_n))$  a donc une limite inférieure positive et, comme  $\mathcal{E}_c$  est une fonctionnelle de Lyapounov, on a pour tout  $t \geq 0$ ,  $\mathcal{E}_c(u_0) \geq \mathcal{E}_c(u_c(t)) \geq 0$ . Par ailleurs, comme  $u_0$  est proche de 1 en  $-\infty$  et que  $V(1) < 0$ , pour  $c'$  assez petit,  $\mathcal{E}_{c'}(u_0) < 0$ . Comme cette inégalité n'est pas compatible avec la précédente, on doit avoir  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \bar{x}(t)/t \geq c'$  pour tout  $c'$  assez petit et le point d'invasion avance donc au moins à la vitesse  $c'$ . Avec des arguments similaires, on arrive à montrer que  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \bar{x}(t)/t < \infty$ , puis que  $\bar{x}(t)/t$  admet une limite  $c_\infty$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

3. **Observation dans le référentiel du point d'invasion.** L'étape précédente a permis d'établir que le point d'invasion possède une vitesse asymptotique  $c_\infty$ . On

regarde maintenant la solution et le point d'invasion dans le référentiel galiléen se déplaçant à vitesse  $c_\infty$  en posant  $\bar{y}_{c_\infty}(t) = \bar{x}(t) - c_\infty t$ . On montre que, dans le référentiel qui suit le point d'invasion,  $u_{c_\infty}$  dissipe de moins en moins d'énergie, c'est-à-dire que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{c_\infty y} |\partial_t u_{c_\infty}(\bar{y}_{c_\infty}(t) + y, t)|^2 dy \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0. \quad (5.7)$$

Démontrer (5.7) est l'un des points cruciaux de la preuve. La difficulté principale de cette étape est que, même si la vitesse asymptotique du point d'invasion est  $c_\infty$ ,  $\bar{y}_{c_\infty}(t)$  n'est pas forcément fixe dans le référentiel à vitesse  $c_\infty$  et peut même être discontinu ou tendre vers  $\pm\infty$ . La fonction  $u_{c_\infty}(\bar{y}_{c_\infty}(t) + \cdot, t)$  n'est donc pas la solution vue dans un référentiel galiléen et (5.7) ne découle pas directement des propriétés de décroissance de  $\mathcal{E}_{c_\infty}$ . Une fois démontrée, la propriété d'amortissement (5.7) peut être utilisée à la façon du principe d'invariance de LaSalle pour les systèmes de type gradients (voir théorème 1.9). Ainsi, pour toute suite de temps  $(t_n) \rightarrow +\infty$ , la compacité asymptotique des équations paraboliques montre que  $u_{c_\infty}(y, t_n)$  tend, quitte à extraire en temps et sur tout compact  $y \in [-M, M]$ , vers un équilibre de l'équation dans le référentiel à vitesse  $c_\infty$ . Comme on suit la solution autour du point d'invasion, cet équilibre ne peut être simplement 0 ou 1 ; il est donc une solution non-triviale fixe dans le référentiel se déplaçant à vitesse  $c_\infty$ , c'est-à-dire un front se déplaçant à vitesse  $c_\infty$  dans le référentiel fixe. En outre, comme  $u(y, t)$  tend vers 0 quand  $y \rightarrow +\infty$ , la convergence a lieu en fait sur toutes demi-droites  $y \in [-M, +\infty[$ .

4. **Amélioration de la convergence.** Les étapes précédentes ont établi une convergence de  $u$  sur tout compact vers une famille de solutions de type fronts se déplaçant tous à la même vitesse  $c_\infty$  (comme pour le principe de LaSalle rappelé au théorème 1.9, l'équilibre ou front limite n'est pas forcément unique). Dans le cas général des systèmes paraboliques de [121], on ne peut dire plus que cela. Quand on a par contre une connaissance a priori des fronts possibles de l'équation, comme dans [55], [RJ6] ou [95], on peut aller plus loin. On commence par montrer la convergence vers un front, seulement pour une sous-suite de temps mais sur tout  $\mathbb{R}$  et non plus seulement sur les demi-droites  $y \in [-M, +\infty[$ . Puis, en utilisant la stabilité locale de la famille de fronts, on obtient la convergence pour tout temps vers un unique front (et même une vitesse de convergence exponentielle si la stabilité locale est exponentielle).

En résumé, la stratégie de preuve ci-dessus repose fortement sur l'existence de certaines structures :

- L'existence d'une fonction de Lyapounov dans chaque référentiel galiléen.
- Une EDP dissipative admettant de la compacité asymptotique pour ses solutions.
- Une non-linéarité de type bistable pour obtenir des contrôles de l'énergie du type  $\int_{\bar{x}(t)}^\infty V(u(x)) dx \geq C \int_{\bar{x}(t)}^\infty |u(x)|^2 dx$ . Ce type d'inégalité joue un rôle important dans les preuves de [121, 55, RJ6] (nous avons par exemple utilisé l'inégalité plus faible  $V(u(x)) \geq 0$  sur  $[\bar{x}(t), +\infty[$  dans la preuve présentée dans l'étape 2 ci-dessus). Si

la non-linéarité n'est pas bistable, il faut obtenir ces estimations par des hypothèses adaptées, voir [95].

- En revanche, à aucun moment n'est utilisé un quelconque principe du maximum.

## 4 Étude des profils asymptotiques des ondes de dé-polarisation dans le cerveau

Dans [RJ5], on considère l'équation parabolique

$$\partial_t u(x, y, t) = \Delta u(x, y, t) - V'(u) \mathbb{1}_{|y| \leq R} - \alpha u \mathbb{1}_{|y| > R}, \quad t \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.8)$$

avec  $\alpha > 0$  et  $R > 0$ . Le potentiel  $V$  est bistable avec 0 et 1 comme équilibres stables et  $V(1) < V(0) = 0$  (figure 5.4). Cette équation a été introduite dans [33] par Chapuisat comme modèle simplifié pour l'étude de la propagation d'ondes dans le cerveau. La variable  $u$  représente l'état de polarisation des neurones :  $u = 0$  est l'état standard de repos,  $u > 0$  correspond à un état excité dit « dé-polarisé » qui peut endommager le neurone. La bande  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |y| \leq R\}$  correspond à la couche de matière grise, où une dé-polarisation peut se propager (le potentiel  $V$  n'a pas 0 comme minimum global). Le reste du plan correspond à la matière blanche où toute dé-polarisation est amortie (potentiel  $\alpha u^2/2$ ).

Le but du modèle (5.8) est de comprendre si une zone de dé-polarisation peut s'étendre ou non, en se propageant dans le cerveau sous forme d'onde de dé-polarisation. En effet, de telles ondes surviennent chez le rat après un accident vasculaire cérébral et aggravent les dommages dans le cerveau. Leur existence dans le cerveau humain est sujet à débat, notre cerveau ayant la particularité d'avoir une couche de matière grise plus fine et plus sinueuse que celle des rats (voir les références de [33], [34] et [RJ5]). Dans [RJ5], le but est de comprendre l'influence de l'épaisseur  $R$  de la couche de matière grise sur l'existence de fronts  $u(x, y, t) = h(x - ct, y)$  pour (5.8) reliant l'état de repos  $u = 0$  à un état dé-polarisé  $u > 0$  (voir figure 5.1, exemple de droite).

Les études [33] et [34] avaient déjà mis en évidence l'influence de l'épaisseur et de la forme de la couche de matière grise sur la propagation des dé-polarisation, dans un cadre plus général que (5.8). On notera au passage que [34] utilise les techniques « à la Risler » introduites dans le paragraphe précédent. En effet, même si (5.8) admet un principe du maximum, aucune solution connue a priori ne peut servir à des comparaisons. Les techniques « à la Risler » permettent donc de montrer l'existence de fronts de dé-polarisation malgré ce problème. Toutefois, [34] est incomplet car seuls les cas  $R$  petit et  $R$  grand sont étudiés et rien n'est connu sur la forme des fronts, leur stabilité, leur unicité... L'article [RJ5] montre que ces défauts peuvent être comblés dans le cas de la dimension 2 de [34], c'est-à-dire pour l'équation (5.8). Pour cela, tout le problème consiste à comprendre les états asymptotiques possibles des fronts  $u(x, y, t) = h(x - ct, y)$  quand  $x \rightarrow -\infty$  (l'état



« bosse » de la figure 5.1). Ces états  $h_\infty$  sont des solutions de l'équation

$$\begin{cases} h_\infty''(y) = V'(h_\infty(y))\mathbb{1}_{|y|\leq R} + \alpha h_\infty(y)\mathbb{1}_{|y|>R}, & y \in \mathbb{R} \\ h_\infty \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow \pm\infty} h_\infty(y) = 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

L'idée est de relier ces profils  $h_\infty$  et leur énergie

$$E(h_\infty) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |h_\infty'|^2 dy + \int_{[-R,R]} V(h_\infty(y)) dy + \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R} \setminus [-R,R]} |h_\infty(y)|^2 dy$$

aux équilibres d'une équation paraboliques sur le segment  $[-R, R]$ . On peut alors s'inspirer des techniques associées à ce type d'EDP, rappelées au chapitre 3, et mener une étude de bifurcations à la Chafee-Infante (voir par exemple [31], [32], [53] ou [46]). On obtient le résultat suivant concernant les profils, c'est-à-dire les solutions  $h_\infty$  de (5.9).

**Théorème 5.5.** *Il existe deux épaisseurs critiques  $R_0$  et  $R_1$  telles que :*

- i) si  $R < R_0$ , il n'existe pas de profil  $h_\infty$  différent de 0.*
- ii) si  $R_0 < R$ , il existe des profils non-triviaux  $h_\infty > 0$ . L'un d'entre eux,  $h_\infty^M$ , est plus grand que tous les autres, est pair et est le seul profil non nul qui soit stable.*
- iii) en outre, si  $R_0 < R < R_1$ ,  $E(h_\infty^M) > E(0)$  et si  $R_1 < R$ ,  $E(h_\infty^M) < E(0)$ .*

Le théorème 5.5 permet de comprendre totalement la dynamique des fronts de (5.8) :

- i) si  $R < R_0$ , il n'existe pas de fronts reliant 0 à un autre état. Toute dépolarisation  $u > 0$  revient à 0 uniformément et exponentiellement vite.
- ii) si  $R_0 < R < R_1$ , il existe une unique famille de fronts stables et elle relie 0 à  $h_\infty > 0$ . En outre, le front se déplace dans le sens de l'invasion de  $h_\infty$  par 0. Toute dépolarisation  $u > 0$  revient à 0 par des fronts.
- iii) si  $R_1 < R$ , il existe une unique famille de fronts stables qui relie 0 à  $h_\infty > 0$ . En outre, le front se déplace dans le sens de l'invasion de 0 par  $h_\infty$ . Les dépolarisations suffisamment importantes s'étendent par des fronts.

Ces trois comportements sont résumés dans la figure 5.5. Il est intéressant de noter que le comportement ii) n'avait jamais été considéré, alors qu'il peut apparaître concrètement et que ce type de retour à l'équilibre peut être suffisamment lent pour engendrer bien plus de dommages que le comportement i).

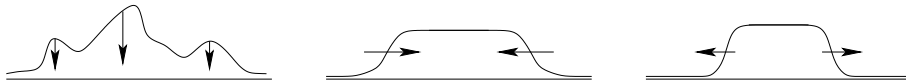


FIGURE 5.5 – Trois cas typiques après une dépolarisation d'une zone de matière grise. De gauche à droite :  $R < R_0$ ,  $R_0 < R < R_1$  et  $R_1 < R$ .

En conclusion, l'article [RJ5] est un exemple d'étude qualitative concrète d'un modèle, effectuée par les méthodes introduites par Chafee, Infante, Fusco, Fiedler, Rocha... C'est en outre une des rares études complètes mettant en valeur la bifurcation de comportements i)-ii)-iii).

## 5 Quelques perspectives

L'existence de la famille de fonctionnelles de Lyapounov pour des équations comme (5.2) ou (5.5) pose des questions assez profondes quant à la dynamique de type gradient. En effet, comme on travaille en domaine non borné, ces énergies peuvent n'avoir qu'une existence formelle : elles ne sont pas définies mais, si on se limite au calcul formel, elles semblent décrire une relaxation vers un état d'équilibre. Que peut-on dire avec cette structure a priori formelle ? Cette question a été abordée par [56] et [57], mais il reste sans doute beaucoup d'explorations à mener.

De même, l'existence d'une famille de fonctionnelles de Lyapounov dans tous les référentiels galiléens semble une structure miraculeuse. Est-elle si particulière ? A-t-on un moyen de la construire ou de prouver son inexistence pour une EDP donnée ? Par exemple, considérons l'aimantation  $m$  d'un fil ferromagnétique, modélisée par l'équation de Landau-Lifschitz

$$\partial_t m(x, t) = -m \wedge m \wedge (\partial_{xx}^2 m + h_{ext}) - \alpha m \wedge (\partial_{xx}^2 m + h_{ext}) \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,$$

où  $h_{ext}$  est un champ extérieur et  $m(x, t) \in \mathbb{S}^2$  est l'aimantation, supposée de norme 1 en tout point. On connaît des fronts de retournement d'aimantation ainsi que leur stabilité locale (voir par exemple [30]). Si  $\alpha = 0$  (pas de précession magnétique), alors on est ramené à un flot harmonique sur  $\mathbb{S}^2$  et il existe une famille de fonctionnelles de Lyapounov dans les référentiels en mouvement (voir [19]), ce qui permet de montrer la stabilité globale des fronts. Le cas intéressant est  $\alpha \neq 0$ , mais on ne sait pas retrouver de fonctionnelles de Lyapounov ailleurs que dans le référentiel fixe. Y a-t-il véritablement un changement de structure, ou n'a-t-on simplement pas encore trouvé les bonnes fonctionnelles ?

Une autre question est de savoir si on peut adapter les idées de Risler à des milieux périodiques, par exemple à un système du type

$$\partial_t u(x, t) = \partial_{xx}^2 u(x, t) - \nabla V(u(x, t), x) \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

où  $V$  est périodique en  $x$ . Dans le cas scalaire et avec  $V$  monostable ou de type combustion, on sait qu'il existe des fronts périodiques stables (voir [70] par exemple). Mais rien ne semble connu pour le cas vectoriel, ou bien dans le cas bistable. On sait aussi qu'il n'y aura pas de fonctionnelle de Lyapounov dans les référentiels à vitesse  $c > 0$  car la dépendance de  $V$  en  $x$  se transforme en un forçage périodique en temps. Par contre, dans ces référentiels, on peut s'attendre, sous de bonnes hypothèses, à avoir convergence vers une solution périodique

en temps, (voir par exemple [146] pour un résultat de ce type). Si cette solution est non-triviale, elle correspond à un front périodique dans le référentiel fixe. La question est de savoir comment sélectionner le bon référentiel pour lequel la limite périodique existera et sera non triviale. La méthode de Risler fait cette sélection à l'aide des différentes énergies, mais cette structure n'existe plus ici.

Enfin, la prolongation naturelle du travail [RJ5] consiste à obtenir le même résultat en dimension trois, avec une couche ou un cylindre de matière grise. L'influence de la courbure de la couche de matière grise est aussi visible par des simulations numériques, mais une étude théorique reste à faire.



# Références

- [RJ1] P. Brunovský, R. Joly et G. Raugel, *Generic Kupka-Smale property for the parabolic equations*, manuscrit en cours en finition.
- [RJ2] R. Joly et G. Raugel, *A striking correspondence between the dynamics generated by the vector fields and by the scalar parabolic equations*, *Confluentes Mathematici* n°3 (2011), p. 471-493.
- [RJ3] R. Joly et G. Raugel, *Generic Morse-Smale property for the parabolic equation on the circle*, *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire* n°27 (2010), p. 1397-1440.
- [RJ4] R. Joly et G. Raugel, *Generic hyperbolicity of equilibria and periodic orbits of the parabolic equation on the circle*, *Transactions of the American Mathematical Society* n°362 (2010), p. 5189-5211.
- [RJ5] G. Chapuisat et R. Joly, *Asymptotic profiles for a travelling front solution of a biological equation*, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* n°21 (2011), p. 2155-2177.
- [RJ6] Th. Gallay et R. Joly, *Global stability of travelling fronts for a damped wave equation with bistable nonlinearity*, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* n°42 (2009), p. 103-140.
- [RJ7] R. Joly et C. Laurent, *A note on the global control of the semilinear wave equation*, manuscrit. ArXiv :1209.2605 [math.AP].
- [RJ8] R. Joly et C. Laurent, *Stabilization for the semilinear wave equation with geometric control condition*, *Analysis and PDE* n°6 (2013), p. 1089-1119.
- [RJ9] R. Joly, *Observation and inverse problems in coupled cell networks*, *Nonlinearity* n°25 (2012), p. 657-676.
- [RJ10] R. Joly, *How opening a hole affects the sound of a flute*, *Journal of Spectral Theory* n°1 (2011), p. 389-408.
- [RJ11] R. Joly, *Adaptation of the generic PDE's results to the notion of prevalence*, *Journal of Dynamics and Differential Equations* n°19 (2007), p. 967-983.

- [1] R. Abraham et J. Robbin, *Transversal mappings and flows*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1967.
- [2] S. Alinhac et M. Baouendi, *A nonuniqueness result for operators of principal type*, Mathematische Zeitschrift n°220 (1995), p. 561-568.
- [3] A. Andronov et L. Pontryagin, *Systèmes grossiers*, Doklady Akademii Nauk SSSR n°14 (1937), p. 247-250.
- [4] S.B. Angenent, *The Morse-Smale property for a semilinear parabolic equation*, Journal of Differential Equations n°62 (1986), p. 427-442.
- [5] S.B. Angenent et B. Fiedler, *The dynamics of rotating waves in scalar reaction diffusion equations*, Transactions of the American Mathematical Society n°307 (1988), p. 545-568.
- [6] D.V. Anosov, *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature*, Trudy Matematicheskogo Instituta Imeni V. A. Steklova n°90 (1967).
- [7] D.G. Aronson et H.F. Weinberger, *Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation*. Lecture Notes in Mathematics n°446, p. 5-49. Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [8] N. Aronszajn, *Differentiability of Lipschitzian mappings between Banach spaces*, Studia Mathematica n°57 (1976), p. 147-190.
- [9] J. Arrieta, A. Carvalho et J.K. Hale, *A damped hyperbolic equation with critical exponent*, Communications in Partial Differential Equations n°17 (1992), p. 841-866.
- [10] A.V. Babin et M.I. Vishik, *Attractors of Evolutionary Equations*, North-Holland, Amsterdam, 1989.
- [11] H. Bahouri et P. Gérard, *High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations*, American Journal of Mathematics n°121 (1999), p. 131-175.
- [12] R. Baire, *Leçons sur les fonctions discontinues*. Réédition de l'original de 1905. Les Grands Classiques Gauthier-Villars, Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1995.
- [13] J.M. Ball, *Attractors of damped wave equations*, Conférence à Oberwolfach, Allemagne, 1992.
- [14] C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch, *Un exemple d'utilisation des notions de propagation pour le contrôle et la stabilisation de problèmes hyperboliques*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, Rendiconti del Seminario Matematico (già "Conferenze di Fisica e di Matematica"). Università e Politecnico di Torino (1988), p. 11-31.
- [15] C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary*, SIAM Journal on Control and Optimization n°30 (1992), p. 1024-1065.
- [16] H. Berestycki et L. Nirenberg, *Travelling front solutions of semilinear equations in  $n$  dimensions*. Frontiers in pure and applied mathematics, p. 31-41. North-Holland, Amsterdam, 1991.

- [17] H. Berestycki et L. Nirenberg, *Travelling fronts in cylinders*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire n°9 (1992), p. 497-572.
- [18] P. Bernard et V. Mandorino, *Some remarks on Thom's transversality theorem*, à paraître dans Annali Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze.
- [19] M. Bertsch, C.B. Muratov et I. Primi, *Traveling wave solutions of harmonic heat flow*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations n°26 (2006), p. 489-509.
- [20] G.D. Birkhoff, *Dynamical systems with two degrees of freedom*, Transactions of the American Mathematical Society n°18 (1917), p. 199-300.
- [21] B. Birnir et K. Nelson, *The existence of smooth attractors of damped and driven nonlinear wave equations with critical exponent,  $s = 5$* . Dynamical systems and differential equations, Vol. I (Springfield, MO, 1996). Discrete and Continuous Dynamical Systems, hors-série n°1 (1998), p. 100-117.
- [22] M.D. Blair, H.F. Smith et C.D. Sogge, *Strichartz estimates for the wave equation on manifolds with boundary*, Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis n°26 (2009), p. 1817-1829.
- [23] R.A. Bonic, *Linear functional analysis*. Notes on Mathematics and its Applications Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1969.
- [24] M. Bramson, *Convergence of solutions of the Kolmogorov Equation to travelling waves*, Memoirs of the American Mathematical Society n°44. Providence, 1990.
- [25] P. Brunovský et S-N. Chow, *Generic properties of stationary state solutions of reaction-diffusion equations*, Journal of Differential Equations n°53 (1984), p. 1-23.
- [26] P. Brunovský et P. Poláčik, *The Morse-Smale structure of a generic reaction-diffusion equation in higher space dimension*, Journal of Differential Equation n°135 (1997), p. 129-181.
- [27] P. Brunovský et G. Raugel, *Genericity of the Morse-Smale property for damped wave equations*, Journal of Dynamics and Differential Equations n°15 (2003), p. 571-658.
- [28] P. Brunovský et B. Fiedler, *Connecting orbits in scalar reaction diffusion equations. II. The complete solution*, Journal of Differential Equations n°81 (1989), p. 106-135.
- [29] N. Burq, G. Lebeau et F. Planchon, *Global existence for energy critical waves in 3-D domains*, Journal of the American Mathematical Society n°21 (2008), p. 831-845.
- [30] G. Carbou, S. Labbé et E. Trélat, *Control of travelling walls in a ferromagnetic nanowire*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series S, n°1 (2008), p. 51-59.
- [31] N. Chafee et E.F. Infante, *Bifurcation and stability for a nonlinear parabolic partial differential equation*, Bulletin of the American Mathematical Society n°80 (1974), p. 49-52.

- [32] N. Chafee, N. et E.F. Infante, *A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type*, *Applicable Analysis* n°4 (1974/75), p. 17-37.
- [33] G. Chapuisat, *Discussion of a simple model of spreading depression*, *ESAIM : Proceedings* n°18 (2007), p. 87-98.
- [34] G. Chapuisat, *Existence and non-existence of curved front solution of a biological equation*, *Journal of Differential Equations* n°236 (2007), p. 237-279.
- [35] X.-Y. Chen, *A strong unique continuation theorem for parabolic equations*, *Mathematische Annalen* n°311 (1998), p. 603-630.
- [36] W.C. Chewning, *Controllability of the Nonlinear Wave Equation in Several Space Variables*, *SIAM Journal on Control and Optimization* n°14 (1976), p. 19-25.
- [37] J.P.R. Christensen, *On sets of Haar measure zero in Abelian Polish groups*, *Israel Journal of Mathematics* n°13 (1972), p. 255-260.
- [38] I.D. Chueshov, *Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems*. Acta, Kharkov, 1999. Traduction anglaise : Acta, Kharkov, 2002.
- [39] J.-M. Coron, *Control and nonlinearity*. *Mathematical Surveys and Monographs* n°136. American Mathematical Society, 2007.
- [40] R. Czaja et C. Rocha, *Transversality in scalar reaction-diffusion equations on a circle*, *Journal of Differential Equations* n°245 (2008), p. 692-721.
- [41] E.N. Dancer et P. Poláčik, *Realization of vector fields and dynamics of spatially homogeneous parabolic equations*, *Memoirs of the American Mathematical Society* n°140 (1999).
- [42] B. Dehman, *Stabilisation pour l'équation des ondes semi-linéaire*, *Asymptotic Analysis* n°27 (2001), p. 171-181.
- [43] B. Dehman, G. Lebeau et E. Zuazua, *Stabilization and control for the subcritical semilinear wave equation*, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* n°36 (2003), p. 525-551.
- [44] E. Feireisl, *Attractors for semilinear damped wave equations on  $\mathbb{R}^3$* , *Nonlinear Analysis* n°23 (1994), p. 187-195.
- [45] B. Fiedler et J. Mallet-Paret, *A Poincaré-Bendixson theorem for scalar reaction-diffusion equations*, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* n°107 (1989), p. 325-345.
- [46] B. Fiedler et C. Rocha, *Heteroclinic orbits of semilinear parabolic equations*, *Journal of Differential Equations* n°125 (1996), p. 239-281.
- [47] B. Fiedler et C. Rocha, *Realization of meander permutations by boundary value problems*, *Journal of Differential Equations* n°156 (1999), p. 282-308.
- [48] B. Fiedler et C. Rocha, *Orbit equivalence of global attractors of semilinear parabolic differential equations*, *Transactions of the American Mathematical Society* n°352 (2000), p. 257-284.



- [49] B. Fiedler, C. Rocha et M. Wolfrum, *Heteroclinic orbits between rotating waves of semilinear parabolic equations on the circle*, Journal of Differential Equations n°201 (2004), p. 99-138.
- [50] B. Fiedler et A. Scheel, *Spatio-temporal dynamics of reaction-diffusion patterns*, dans *Trends in nonlinear analysis*, p. 23-152. Springer Verlag, Berlin, 2003.
- [51] P. Fife et J.B. McLeod, *The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions*, Archive for Rational Mechanics and Analysis n°65 (1977), p. 335-361.
- [52] R.A. Fisher, *The advance of advantageous genes*, Annals of Eugenics n°7 (1937), p. 355-369.
- [53] G. Fusco et C. Rocha, *A permutation related to the dynamics of a scalar parabolic PDE*, Journal of Differential Equations n°91 (1991), p. 111-137.
- [54] V.A. Galaktianov et P. J. Harwin, *Sturm's theorems on zero sets in nonlinear parabolic equations*, dans *Sturm Liouville Theory : Past and Present*, W. O. Amrein, A. M. Hinz et D. B. Pearson éditeurs. Birkhäuser Verlag, 2005.
- [55] Th. Gallay et E. Risler, *A variational proof of global stability for bistable travelling waves*, Differential and Integral Equations n°20 (2007), p. 901-926.
- [56] Th. Gallay et S. Slijepčević, *Energy flow in formally gradient partial differential equations on unbounded domains*, Journal on Dynamics and Differential Equations n°13 (2001), p. 757-789.
- [57] Th. Gallay et S. Slijepčević, *Distribution of Energy and Convergence to Equilibria in Extended Dissipative Systems*, manuscrit.
- [58] J. Garnier, Th. Giletti, F. Hamel et L. Roques, *Inside dynamics of pulled and pushed fronts*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées n°98 (2012), p. 428-449.
- [59] J. Ginibre et G. Velo, *The global Cauchy problem for the nonlinear Klein-Gordon equation*, Mathematische Zeitschrift n°189 (1985), pp. 487-505.
- [60] J. Ginibre et G. Velo, *The global Cauchy problem for the nonlinear Klein-Gordon equation. II*. Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire n°6 (1989), pp. 15-35.
- [61] M. Golubitsky et V. Guillemin, *Stable mapping and their singularities*, Graduate Texts in Mathematics n°14, Springer Verlag, New York-Heidelberg, 1973.
- [62] J. Guckenheimer et R.F. Williams, *Structural stability of Lorenz attractors*, Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques n°50 (1979), p. 59-72.
- [63] J.K. Hale, *Asymptotic behaviour and dynamics in infinite dimensions*, Research Notes in Mathematics n°132. Pitman, Boston, 1985.

- [64] J.K. Hale, *Asymptotic behavior of dissipative systems*, Mathematical Surveys and Monographs, n°25 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1988).
- [65] J.K. Hale et X.-B. Lin, *Heteroclinic orbits for retarded functional differential equations*, Journal of Differential Equations n°65 (1986), p. 175-202.
- [66] J.K. Hale, L. Magalhães et W. Oliva, *An introduction to infinite dimensional dynamical systems*, Applied Mathematical Sciences n°47 (Springer-Verlag, 1984). Seconde édition, *Dynamics in infinite dimensions*, (Springer Verlag, 2002).
- [67] J.K. Hale, R. Joly et G. Raugel, livre en cours de rédaction.
- [68] J.K. Hale et G. Raugel, *Regularity, determining modes and Galerkin methods*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées n°82 (2003), p. 1075-1136.
- [69] F. Hamel, R. Monneau et J.-M. Roquejoffre, *Stability of travelling waves in a model for conical flames in two space dimensions*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure n°37 (2004), p. 469-506.
- [70] F. Hamel et L. Roques, *Uniqueness and stability properties of monostable pulsating fronts*, Journal of the European Mathematical Society n°13 (2011), p. 345-390.
- [71] Q. Han et F.-H. Lin, *Nodal sets of solutions of parabolic equations. II*, Communications in Pure and Applied Mathematics n°47 (1994), p. 1219-1238.
- [72] A. Haraux, *Two remarks on dissipative hyperbolic problems*, séminaire du collège de France n°7. Research Notes in Mathematics n°122. Pitman, 1985.
- [73] R. Hardt et L. Simon, *Nodal sets for solutions of elliptic equations*, Journal of Differential Geometry n°30 (1989), p. 505-522.
- [74] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Mathematics n°840 (Springer-Verlag, Berlin-New York), 1981.
- [75] D. Henry, *Some infinite-dimensional Morse-Smale systems defined by parabolic partial differential equations*, Journal of Differential Equations n°59 (1985), p. 165-205.
- [76] D. Henry, *Perturbation of the boundary in boundary-value problems of partial differential equations*. Edité par Jack Hale et Antônio Luiz Pereira. London Mathematical Society Lecture Note Series n°318. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [77] M.W. Hirsch, *Differential topology*. Graduate Texts in Mathematics n°33. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [78] L. Hörmander, *On the uniqueness of the Cauchy problem under partial analyticity assumptions*, Geometrical optics and related topics (Cortona, 1996), Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., Birkhäuser Boston n°32 (1997), p. 179-219.
- [79] B. Hunt, T. Sauer et J. Yorke, *Prevalence : a translation invariant "almost every" on infinite dimensional spaces*, Bulletin of the American Mathematical Society, New Series, n°27 (1992), p. 217-238.

- [80] R. Joly, *Generic transversality property for a class of wave equations with variable damping*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées n°84 (2005), p. 1015-1066.
- [81] R. Joly, *Convergence of the wave equation damped on the interior to the one damped on the boundary*, Journal of Differential Equations n°229 (2006), p. 588-653.
- [82] R. Joly, *New examples of damped wave equations with gradient-like structure*, Asymptotic Analysis n°53 (2007), p. 237-253.
- [83] Ya.I. Kanel', *Some problems involving burning-theory equations*, Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R. n°136 (1961), p. 268-271. Traduction anglaise : Soviet Math. Dokl. n°2 (1961), p. 533-536.
- [84] L. Kapitanski, *Minimal compact global attractor for a damped wave equation*, Communications in Partial Differential Equations n°20 (1995), p. 1303-1323.
- [85] M. Kazemi et M.V. Klibanov, *Stability estimates for ill-posed Cauchy problems involving hyperbolic equations and inequalities*, Applicable Analysis n°50 (1993), p. 93-102.
- [86] J. Kolář, *Porous sets that are Haar null, and nowhere approximately differentiable functions*, Proceedings of the American Mathematical Society n°129 (2000), p. 1403-1408.
- [87] A.N. Kolmogorov, I.G. Petrovskii et N.S. Piskunov, *Etude de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique*, Moscow Univ. Math. Bull. n°1 (1937), p. 1-25.
- [88] I. Kupka, *Contribution à la théorie des champs génériques*, Contributions to Differential Equations n°2 (1963), p. 457-484. Addendum et corrections, ibid. n°3 (1964), p. 411-420.
- [89] I. Lasiecka et R. Triggiani, *Exact controllability of semilinear abstract systems with applications to wave and plates boundary control problems*, Applied Mathematics and Optimization n°23 (1991), p. 109-154.
- [90] I. Lasiecka, R. Triggiani et X. Zhang, *Nonconservative wave equations with unobserved Neumann B.C. : global uniqueness and observability in one shot*, Contemporary Mathematics n°268 (2000), p. 227-325.
- [91] K.-S. Lau, *On the nonlinear diffusion equation of Kolmogorov, Petrovsky and Piskunov*, Journal of Differential Equations n°59 (1985), p. 44-70.
- [92] C. Laurent, *On stabilization and control for the critical Klein Gordon equation on 3-D compact manifolds*, Journal of Functional Analysis n°260 (2011), p. 1304-1368.
- [93] L. Li et X. Zhang, *Exact controllability for semilinear wave equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications n°250 (2000), p. 589-597.
- [94] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués*. Recherches en Mathématiques Appliquées n°8. Masson, Paris, 1988.

- [95] C. Luo, *Global stability of travelling fronts for a damped wave equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications n°399 (2013), p. 260-278.
- [96] P. Mankiewicz, *On the differentiability of Lipschitz mappings in Fréchet spaces*, Studia Mathematica n°45 (1973), p. 15-29.
- [97] H. Matano, *Nonincrease of the lap-number of a solution for a one-dimensional semilinear parabolic equation*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. n°29 (1982), p. 401-441.
- [98] H. Matano et K.-I. Nakamura, *The global attractor of semilinear parabolic equations on  $\mathbb{T}^1$* , Discrete and Continuous Dynamical Systems n°3 (1997), p. 1-24.
- [99] C.B. Muratov, *A global variational structure and propagation of disturbances in reaction-diffusion systems of gradient type*, Discrete and Continuous Dynamical Systems n°4 (2004), p. 867-892.
- [100] C.B. Muratov et M. Novaga, *Global exponential convergence to variational traveling waves in cylinders*, SIAM Journal on Mathematical Analysis n°44 (2012), p. 293-315.
- [101] K. Nickel, *Gestaltaussagen über Lösungen parabolischer Differentialgleichungen*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik n°211 (1962), p. 78-94.
- [102] W. Ott et J.A. Yorke, *Prevalence*, Bulletin of the American Mathematical Society, New Series, n°42 (2005), p. 263-290.
- [103] J. Palis, *On Morse-Smale dynamical systems*, Topology n°8 (1968), p. 385-404.
- [104] J. Palis et W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*, traduit du portugais par A. K. Manning (Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982).
- [105] J. Palis et S. Smale, *Structural stability theorems*, dans Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968 (American Mathematical Society, Providence, R.I., 1970), p. 223-231.
- [106] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Applied Mathematical Sciences n°44 (1983), Springer-Verlag.
- [107] M.M. Peixoto, *Structural stability on two-dimensional manifolds*, Topology n°1 (1962), p. 101-120.
- [108] M.M. Peixoto, *On an approximation theorem of Kupka and Smale*, Journal of Differential Equations n°3 (1967), p. 214-227.
- [109] H. Poincaré, *Sur les courbes définies par une équation différentielle*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences n°90 (1880), p. 673-675 (voir aussi *Œuvres*, Gauthier-Villars, Paris, Vol. 1, (1928)).
- [110] P. Poláčik, *Imbedding of any vector field in a scalar semilinear parabolic equation*, Proceedings of the American Mathematical Society n°115 (1992), p. 1001-1008.
- [111] P. Poláčik, *High-dimensional  $\omega$ -limit sets and chaos in scalar parabolic equations*, Journal of Differential Equations n°119 (1995), p. 24-53.

- [112] P. Poláčik, *Reaction-diffusion equations and realization of gradient vector fields*, dans *International Conference on Differential Equations (Lisboa, 1995)*, p. 197-206. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998.
- [113] P. Poláčik, *Persistent saddle connections in a class of reaction-diffusion equations*, *Journal of Differential Equations* n°56 (1999), p. 182-210.
- [114] P. Poláčik, *Parabolic equations : asymptotic behavior and dynamics on invariant manifolds*, in *Handbook of dynamical systems*, n°2, p. 835-883, North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [115] C.C. Pugh, *The closing lemma*, *American Journal of Mathematics* n°89 (1967), p. 956-1009.
- [116] F. Quinn, *Transversal approximation on Banach manifolds*, *Global Analysis (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics n°15, Berkeley, 1968)* p. 213-222, Amer. Math. Soc., Providence, 1970.
- [117] F. Quinn et A. Sard, *Hausdorff conullity of critical images of Fredholm maps*, *American Journal of Mathematics* n°94 (1972), p. 1101-1110.
- [118] G. Raugel, *Global attractors in partial differential equations*, in *Handbook of dynamical systems*, Vol 2 (North-Holland, Amsterdam, 2002), p. 885-982.
- [119] L. Rifford, *Closing geodesics in  $C^1$  topology*, *Journal of Differential Geometry* n°91 (2012), p.361-382.
- [120] L. Rifford et R. Ruggiero, *Generic properties of closed orbits of Hamiltonian flows from Mañé's viewpoint*, *International Mathematics Research Notices* n°22 (2012), p. 5246-5265.
- [121] E. Risler, *Global convergence towards travelling fronts in nonlinear parabolic systems with a gradient structure*, *Annales de l'Institut Henri Poincaré* n°25 (2008), p. 381-424.
- [122] L. Robbiano et C. Zuily, *Uniqueness in the Cauchy problem for operators with partially holomorphic coefficients*, *Inventiones Mathematicae* n°131 (1998), p. 493-539.
- [123] J.W. Robbin, *Algebraic Kupka-Smale theory*. Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980, pp. 286301, *Lecture Notes in Mathematics* n°898. Springer, Berlin-New York, 1981.
- [124] C.R. Robinson, *Dynamical systems. Stability, symbolic dynamics, and chaos*. Seconde édition, *Studies in Advanced Mathematics* (CRC Press, Boca Raton, FL, 1999).
- [125] C.R. Robinson, *Generic properties of conservative systems I and II*, *American Journal of Mathematics* n°92 (1970), p. 562-603 et 897-906.
- [126] J.C. Robinson, *Infinite-dimensional dynamical systems. An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors*, *Cambridge Texts in Applied Mathematics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).

- [127] C. Rocha, *Realization of period maps of planar Hamiltonian systems*, Journal of Dynamics and Differential Equations n°19 (2007), p. 571-591.
- [128] J.-M. Roquejoffre et V. Roussier-Michon, *Nontrivial large-time behaviour in bistable reaction-diffusion equations*, Annali di Matematica Pura ed Applicata n°188 (2009), p. 207-233.
- [129] A. Ruiz, *Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potential*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées n°71 (1992), p. 455-467.
- [130] B. Sandstede et B. Fiedler, *Dynamics of periodically forced parabolic equations on the circle*, Ergodic Theory and Dynamical Systems n°2 (1992), p. 559-571.
- [131] J.C. Saut et R. Temam, *Generic properties of nonlinear boundary value problems*, Communication in PDE n°4 (1979), p. 293-319.
- [132] A. Sard, *The measure of the critical values of differentiable maps*, Bulletin of the American Mathematical Society n°48 (1942), p. 883-890.
- [133] S. Smale, *On dynamical systems*, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, n°5 (1960), p. 195-198.
- [134] S. Smale, *Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa n°17 (1963), p. 97-116.
- [135] S. Smale, *An Infinite Dimensional Version of Sard's Theorem*, American Journal of Mathematics n°87 (1965), p. 861-866.
- [136] S. Smale, *Diffeomorphisms with many periodic points*, in *Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse)*, (Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1965), p. 63-80.
- [137] S. Smale, *An Infinite Dimensional Version of Sard's Theorem*, American Journal of Mathematics n°87 (1965), p. 861-866.
- [138] J. Smoller et A. Wasserman, *Generic bifurcation of steady-state solutions*, Journal of Differential Equations n°52 (1984), p. 432-438.
- [139] C. Sogge, *Lectures on nonlinear wave equations*. Monographs in Analysis, II, International Press, 1995.
- [140] C. Sturm, *Sur une classe d'équations à différences partielles*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées n°1 (1836), p. 373-444.
- [141] T. Tao, *Nonlinear dispersive equations. Local and global analysis*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics n°106. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
- [142] D. Tataru, *Unique continuation for operators with partially analytic coefficients*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. n°78 (1999), p. 505-521.
- [143] R. Thom, *Les singularités des applications différentiables*, Annales de l'Institut Fourier n°6 (1955), p. 43-87.

- [144] R. Thom, *Un lemme sur les applications différentiables*, Bol. Soc. Mat. Mexicana n°1 (1956), p. 59-71.
- [145] A. Tromba, *Fredholm vector fields and a transversality theorem*, Journal of Functional Analysis n°23 (1976), p. 362-368.
- [146] M.P. Vishnevskii, *Stabilization of solutions of boundary value problems for quasilinear parabolic equations that periodically depend on time*, Sibirsk. Mat. Zh. n°34 (1993), p. 11-22. Traduction dans Siberian Math. J. n°34 (1993), p. 801-811.
- [147] M. Wolfrum, *A sequence of order relations : encoding heteroclinic connections inscalar parabolic PDE*, Journal of Differential Equations n°183 (2002), p. 56-78.
- [148] J.x. Xin, *Multidimensional stability of traveling waves in a bistable reaction-diffusion equation*, Communications in Partial Differential Equations n°17 (1992), p. 1889-1899.
- [149] T.I. Zelenyak, *Stabilization of solutions of boundary value problems for a second-order parabolic equation with one space variable*, Differencialnye Uravnenija n°4 (1968), p. 34-45. Traduit dans Differential equations n°4, p. 17-22.
- [150] X. Zhang et E. Zuazua, *Exact controllability of the semi-linear wave equation*, dans *Sixty Open Problems in the Mathematics of Systems and Control*, p. 173-178. Edité par V.D. Blondel et A. Megretski, Princeton University Press, 2004.
- [151] E. Zuazua, *Exponential decay for semilinear wave equations with localized damping*, Communications in Partial Differential Equations n°15 (1990), p. 205-235.
- [152] E. Zuazua, *Exact controllability for the semilinear wave equation*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées n°69 (1990), p. 1-33.
- [153] E. Zuazua, *Exponential decay for semilinear wave equations with localized damping in unbounded domains*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées n°70 (1992), p. 513-529.
- [154] E. Zuazua, *Exact controllability for semilinear wave equations in one space dimension*, Annales de l'Institut Henri Poincaré n°10 (1993), p. 109-129.