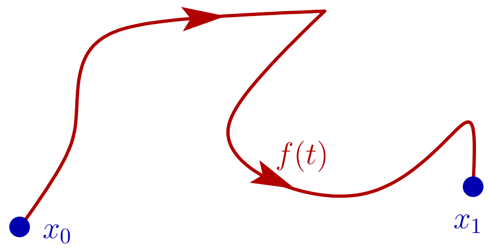
Chapitre 7 : Compléments

1 Connexité par arc

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Une *courbe*, un *chemin* ou un *arc* dans E est l'image d'une fonction continue $f : [0,1] \to E$. Cet arc relie deux points x_0 et x_1 si $f(0) = x_0$ et $f(1) = x_1$. Comme f est continue, la courbe peut être irrégulière, avoir des coudes, être une ligne brisée etc. mais elle ne peut pas faire des « sauts ».



Un chemin reliant deux points du plan

Définition 7.1

Un ensemble C de E est dit *connexe par arcs* si tous points x_0 et x_1 de C peuvent être reliés par un chemin $f : [0,1] \to E$ continu restant dans C, c'est-à-dire que $f(0) = x_0$, $f(1) = x_1$ et pour tout $t \in [0,1]$, $f(t)$ est dans C.

Proposition 7.2

Un ensemble C convexe est connexe et donc les boules de E sont connexes.

Démonstration : Soit x_0 et x_1 dans C. Par définition de la convexité, tout le segment $\theta x_1 + (1-\theta)x_0$ avec $\theta \in [0,1]$ est dans C. Il suffit donc de prendre $f(t) = (1-t)x_0 + tx_1$. On vérifie que f est bien continue puisque

$$\|f(t) - f(t')\| = \|(t'-t)x_0 + (t-t')x_1\| \leq (\|x_0\| + \|x_1\|)|t-t'|$$

ce qui montre que f est lipschitzienne. □

Proposition 7.3

La propriété d'être reliable par un arc est une relation d'équivalence parmi les points d'un ensemble A.

Démonstration : Il est évident qu'un point x_0 est relié à lui-même par l'arc constant $f : t \mapsto x_0$. Si x_0 est relié à x_1 par le chemin $f : [0,1] \to A$, alors x_1 est relié à x_0 par le chemin $\tilde{f} : t \mapsto f(1-t)$ ($\tilde{f}$ est continue comme composée de fonction continue). Si f est un chemin reliant x_0 à x_1 et g un chemin reliant x_1 à x_2, alors le chemin

$$h \;:\; t \in [0,1] \mapsto \begin{cases} f(2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \text{si } t > 1/2 \end{cases}$$

est un chemin reliant x_0 à x_1 (il suffit de voir que les courbes se recollent en $t = 1/2$ en x_1, ce qui assure la continuité de h, voir la figure 7.1). □

On appelle *composantes connexes (par arcs)* d'un ensemble les classes d'équivalences des points reliables par des chemins. Chaque composante connexe est connexe et leur réunion est tout l'ensemble. Par construction, aucun point d'une composante ne peut être relié à un point d'une autre composante.

Proposition 7.4

Si A et B sont connexes par arcs et si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $A \cup B$ est connexe par arc.

Démonstration : Soit x dans $A \cap B$. Par hypothèse, tout point de A est reliable à x par un arc et idem pour tout point de B. Par la transitivité prouvée ci-dessus, on peut donc aussi relier les points de A à ceux de B. □

! On ne peut pas dire mieux que la proposition ci-dessus pour les unions et intersections comme on le voit dans la figure 7.1 ci-dessous.

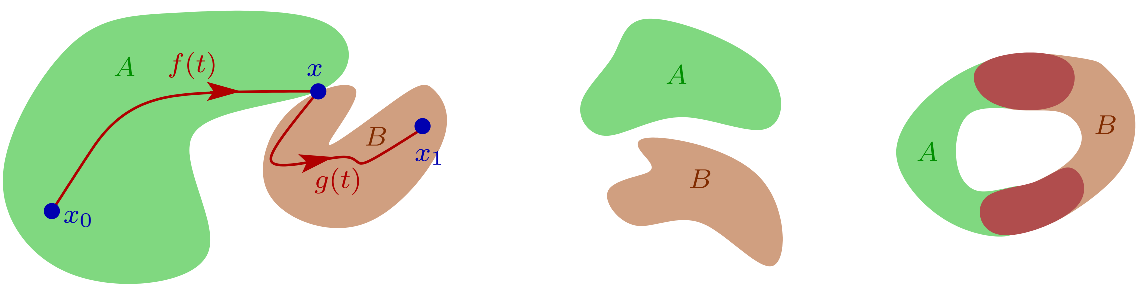


FIGURE 7.1 – *À gauche, une illustration de la proposition 7.4. Au centre et à droite, des exemples d'union et d'intersection non-connexes par arcs d'ensembles connexes par arcs.*

Proposition 7.5

L'image par une fonction continue d'un ensemble connexe par arcs est connexe par arcs.

Démonstration : Soient $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et soit $f : E \to F$ continue. Soit A un ensemble connexe par arcs de E et soit y et y' deux points de $f(A)$. Par définition, il existe deux points x et x' de A tels que $f(x) = y$ et $f(x') = y'$. Comme A est connexe par arcs, il existe un chemin continu $h : [0,1] \to A$ tel que $h(0) = x$ et $h(1) = x'$. Par composition, la fonction $f \circ h$ est un chemin continu reliant y à y'. Donc $f(A)$ est bien connexe par arcs. $\square$

Proposition 7.6

Soit A un ensemble connexe par arcs d'un espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$ et soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs réelles. Soient a et b deux points de A tels que $f(a) < f(b)$, alors pour toute valeur $y \in]f(a),f(b)[$, il existe $c \in A$ tel que $f(c) = y$.

Démonstration : Comme A est connexe par arcs, il existe $h : [0,1] \to A$ continue telle que $h(0) = a$ et $h(1) = b$. La fonction $f \circ h$ est alors une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $(f \circ h)(0) < (f \circ h)(1)$ et par le théorème des valeurs intermédiaires classique, il existe un temps $t_* \in]0,1[$ tel que $(f \circ h)(t_*) = y$. Le point $c = h(t_*)$ convient alors. $\square$

Exemples :

- Dans tout espace vectoriel normé, la norme est une fonction continue. Donc la sphère unité sépare un « intérieur » $A = \{x \in E,\|x\| < 1\}$ d'un « extérieur » $B = \{x \in E,\|x\| > 1\}$ dans le sens où si un chemin h passe de A à B, alors il passe forcément à travers la sphère unité (on applique la proposition 7.6 à $\|h(\cdot)\|$).

- Dans tout espace vectoriel normé de dimension plus grande que 2 (donc tous sauf $\mathbb{R}$), la sphère unité est connexe par arc. En effet, si x et $x' \neq -x$ sont de norme 1, alors le chemin

$$h \;:\; t \in [0,1] \;\longmapsto h(t) = \frac{1}{\|(1-t)x + tx'\|}((1-t)x + tx')$$

  est bien défini et continu sur la sphère (car $(1-t)x + tx' \neq 0$ pour tout t). Si on considère $x' = -x$ et si on est en dimension plus grande que 2, il existe au moins un autre point sur la sphère unité et on peut simplement passer via ce troisième point en collant deux chemins comme ci-dessus.

- Sur Terre, il existe toujours deux points diamétralement opposés où la température est identique. En effet, la surface de la Terre est connexe par arc. On pose $f(x) = T(x) - T(-x)$ où T est la fonction « température » et où $-x$ désigne le point diamétralement opposé à x. Physiquement, il est raisonnable que f soit continue et $f(x) = -f(-x)$. Donc si en un point x_0, on a $T(x_0) \neq T(-x_0)$, alors $f(x_0)$ et $f(-x_0)$ sont de signes opposés et il existe un point x_* tel que $f(x_*) = 0$, c'est-à-dire $T(x_*) = T(-x_*)$. En fait, on voit qu'il suffit de travailler sur un cercle. Avec la sphère bidimensionnelle, on peut même dire mieux : on peut avoir la même température et la même pression.

2 Homéomorphismes

2.1 Homéomorphismes

Un concept extrêmement important en topologie est celui d'homéomorphisme.

Définition 7.7

Soient $A \subset X$ et $B \subset Y$ deux sous-ensembles d'espaces vectoriels normés. On dit que f est un **homéomorphisme** entre A et B si f est bijective de A vers B et si f et f^{-1} sont continues.
Si $A \subset X$ et $B \subset Y$ sont deux sous-ensembles d'espaces vectoriels normés pour lesquels il existe un homéomorphisme $f : A \to B$, on dit qu'ils sont **homéomorphes**.

Proposition 7.8

La relation d'homéomorphie est une relation d'équivalence puisqu'elle est

(a) réflexive : A est homéomorphe à A.

(b) symétrique : A est homéomorphe à B si et seulement si B est homéomorphe à A.

(c) transitive : si A est homéomorphe à B et si B est homéomorphe à C, alors A est homéomorphe à C.

Démonstration : La fonction identité $Id : x \in A \to x \in A$ et une bijection et est toujours continue car $1-$lipschitzienne. Sa réciproque étant elle-même, (a) est clair. Pour (b), il suffit de voir que si $f : A \to B$ est un homéomorphisme, alors $f^{-1} : B \to A$ en est un aussi. Enfin, si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont des homéomorphismes, alors $g \circ f$ est un homéomorphisme de A vers C, ce qui montre (c). □

Pour un topologue, deux espaces homéomorphes sont identiques dans le sens où ils ont les mêmes propriétés fondamentales. En effet, en corollaire des caractérisations de la continuité, un homéomorphisme donne une relation parfaite entre les topologies de A et B (si A et B ne sont pas des espaces entiers, on utilise la topologie induite introduite dans les compléments du chapitre 4).

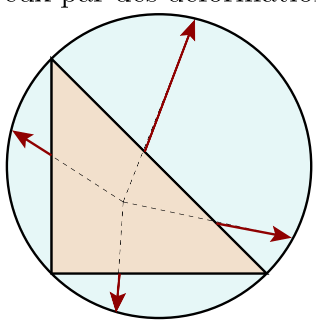
Proposition 7.9

Soient $A \subset X$ et $B \subset Y$ deux sous-ensembles d'espaces vectoriels normés et f un homéomorphisme entre A et B.

- $\mathcal{O} \subset A$ est un ouvert de A si et seulement si $f(\mathcal{O})$ est un ouvert de B
- $\mathcal{F} \subset A$ est un fermé de A si et seulement si $f(\mathcal{F})$ est un fermé de B
- La suite (u_n) converge dans A si et seulement si $f(u_n)$ converge dans B
- $K \subset A$ est un compact de X si et seulement si $f(K)$ est un compact de Y.
- A est connexe par arcs si et seulement si B est connexe par arcs.

Exemples :

- deux intervalles $]a,b[$ et $]a',b'[$ de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes par une translation et une homothétie, c'est aussi le cas de deux intervalles du type $[a,b]$, mais aussi de deux intervalles du type $[a,b[$ ou $]a,b]$ (en ajoutant une éventuelle symétrie).
- $[a,b]$ n'est ni homéomorphe à $]a,b[$ ni à $[a,b[$ puisque le premier est compact alors que les deux autres ne le sont pas.
- Les intervalles $]a,b[$ sont homéomorphes à $\mathbb{R}$ et aux intervalles $]a,+\infty[$. En effet, la tangente est un homéomorphisme entre $]-\pi/2,\pi/2[$ et $\mathbb{R}$ et l'exponentielle entre $\mathbb{R}$ et $]0,+\infty[$.
- Les ensembles $[0,1]$ et $[0,1] \cup \{2\}$ ne sont pas homéomorphes : l'un est connexe par arcs et l'autre non.
- Les ensembles $]a,b[$ et $[a,b[$ ne sont pas homéomorphes. En effet, s'il existait un homéomorphisme $h : [a,b[\to]a,b[$, alors $h_{|]a,b[} :]a,b[\to]a,b[\setminus \{h(a)\}$ serait aussi un homéomorphisme. Mais $]a,b[$ est connexe par arcs alors que $]a,b[$ privé de n'importe quel point est séparé en deux composantes connexes. La même astuce marche pour montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes : si on retire un point à $\mathbb{R}^2$, il reste connexe par arcs, mais ce n'est pas le cas de $\mathbb{R}$.
- Toutes les boules ouvertes (resp. fermées) d'un espace vectoriel normé sont homéomorphes entre elles par translation et homothéties.
- Tous les triangles du plan sont homéomorphes entre eux par des déformations affines : translations, symétries, compression et dilatations, rotations... Mais les triangles pleins du plan sont aussi homéomorphes aux disques fermés. Pour cela, on peut utiliser des dilatations qui dépendent de la direction comme dans le dessin ci-contre. L'idée fonctionne avec tous les polygones. Donc tous les polygones pleins sont homéomorphes entre eux et homéomorphes aux disques.



2.2 Le point fixe de Brouwer

On a énoncé dans la proposition 4.33 un théorème de point fixe dans les triangles, dont on rappelle ici l'énoncé.

Proposition 7.10 (point fixe de Brouwer dans un triangle)

Soit $T \subset \mathbb{R}^2$ le triangle rectangle isocèle de sommets (0,0), (1,0) et (0,1), bords compris. Toute fonction continue $f : T \to T$ admet un point fixe.

Grâce aux homéomorphismes, nous pouvons passer à d'autres formes géométriques.

Théorème 7.11 (point fixe de Brouwer en dimension 2)

Si F est un fermé de $\mathbb{R}^2$ homéomorphe au disque fermé, alors toute fonction continue $f : F \to F$ admet un point fixe.

Démonstration : On a vu plus haut que le triangle T est homéomorphe au disque fermé. Donc une forme homéomorphe au disque est aussi homéomorphe à T. Soit $h : T \to F$ une bijection telle que h et h^{-1} sont continues. On pose $g = h^{-1} \circ f \circ h$ qui est bien définie et continue de T dans T. La proposition 5.10 montre que g a un point fixe x dans T. Mais alors $h^{-1}(f(h(x))) = x$ et donc $f(h(x)) = h(x)$, ce qui montre que $h(x)$ est un point fixe de f dans F. $\square$

On a vu que ce résultat de point fixe ne peut pas se généraliser pour toute forme de $\mathbb{R}^2$ puisque la rotation dans l'anneau F ci-contre est une fonction continue sans point fixe. Cela montre qu'un anneau et un disque ne sont pas homéomorphes. En fait, on peut classer l'ensemble des surfaces géométriquement raisonnables (bords pas trop irréguliers etc.) en fonction de leur nombre de « trous » : deux surfaces sont homéomorphes si et seulement si elles ont le même nombre de « trous ».