Chapitre 5 : Complétude

1 Suites de Cauchy et espaces complets

On peut généraliser la notion de suites de Cauchy de façon naturelle.

Définition 5.1

Une suite (x_n) d'un espace vectoriel normé E est dite **de Cauchy** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p \geq N$ et $q \geq N$, on a $\|x_p - x_q\| < \varepsilon$.

Une interprétation géométrique de cette définition est la suivante.

Proposition 5.2

Une suite (x_n) est de Cauchy si et seulement si, pour tout $r > 0$, la suite finit par entrer dans une boule de rayon r et ne plus en sortir.

Démonstration : Si la suite est dans une boule $B(x,r)$ à partir du rang N, alors $\|x_p - x_q\| \leq \|x_p - x\| + \|x - x_q\| < 2r$ pour tout $p,q \geq N$. Réciproquement, si $\|x_p - x_q\| < \varepsilon$ pour tout $p,q \geq N$, alors x_p est dans $B(x_N,\varepsilon)$ pour tout $p \geq N$. $\square$

Un des sens liant le concept de suite de Cauchy et la convergence est toujours vrai.

Proposition 5.3

Si une suite (x_n) d'un espace vectoriel normé E est convergente, alors elle est de Cauchy.

Démonstration : Soit $\ell \in E$ la limite de la suite et soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite converge, il existe un rang N tel que les termes x_n avec $n \geq N$ sont dans la boule $B(\ell,\varepsilon/2)$. Dans ce cas, pour tout p et q plus grands que N, on a

$$\|x_p - x_q\| = \|(x_p - \ell) - (x_q - \ell)\| \leq \|x_p - \ell\| + \|x_q - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,. \quad \square$$

Dans $\mathbb{R}$, la réciproque est vraie mais ce n'est pas le cas dans tous les espaces. Il s'agit d'une propriété importante et que les espaces qui la vérifient sont appelés *complets*.

Définition 5.4

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'il est **complet** si toutes ses suites de Cauchy convergent dans E. On dit aussi que E est un **espace de Banach**.

Stefan Banach
1892-1945
Pologne

Les deux définitions d'espace complet et d'espace de Banach seront équivalentes pour nous. En fait, il y a une distinction : un espace topologique dont toutes les suites de Cauchy convergent est dit complet. Quand cet espace est de plus un espace vectoriel normé, alors on parle d'espace de Banach. Comme ce cours ne regarde que ce cas particulier d'espace topologique, les deux définitions se recouvrent. Le nom de Banach revient souvent en analyse fonctionnelle.

Proposition 5.5

L'espace $\mathbb{R}^d$ est complet : il s'agit d'un espace de Banach.

Démonstration : Comme toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, on peut considérer par exemple la norme infinie. Si (x_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^d$, alors chaque coordonnée est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que $\|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon$ pour tout $n,m \geq N$ et on a alors

$$\forall n,m \geq N \ , \ \ \forall i \in [\![1,d]\!] \ , \ \ |x_n^i - x_m^i| \leq \|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon \ .$$

La complétude de la droite réelle nous donne que chaque coordonnée converge vers un réel ℓ^i puis la proposition 3.47 montre que (x_n) tend vers $\ell = (\ell^1, \ldots, \ell^d)$. □

Est-ce qu'il y a des exemples d'espaces non-complets ? Oui, dès qu'on passe en dimension infinie, les choses sont moins triviales.

Proposition 5.6

On considère $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes réels muni de la norme

$$P = a_p X^p + a^{p-1} X^{p-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X] \ \longmapsto \ \|P\| = \max_i |a_i| \ .$$

Cet espace vectoriel normé n'est pas complet.

Démonstration : On a vu dans le corollaire 3.18 qu'il s'agit bien d'un espace vectoriel normé. Montrons que cet espace n'est pas complet. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes

$$P_n = X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3 + \ldots + \frac{1}{n}X^n \ .$$

Il s'agit d'une suite de Cauchy car si $p \geq q \geq N$, on a

$$\|P_p - P_q\| = \|\frac{1}{p}X^p + \frac{1}{p-1}X^{p-1} + \ldots + \frac{1}{q+1}X^{q+1}\| = \max_{i\in[\![q+1,p]\!]} \frac{1}{i} \leq \frac{1}{N} \ .$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver N assez grand tel que $\|P_q - P_q\| < \varepsilon$ pour tout $p,q \geq N$. Mais est-ce que la suite (P_n) a une limite ? Si oui, alors sa limite P devrait avoir le coefficient a_i de X^i égal à $1/i$ pour tout i car

$$\forall i \in \mathbb{N} \ , \ \ \forall n \geq i \ , \ \ \|P_n - P\| \geq |\frac{1}{i} - a_i| \ .$$

Mais dans ce cas, cela ne peut être un polynôme car il y a un nombre infini de coefficients non nuls. Donc le seul candidat à être la limite de (P_n) n'existe pas dans l'espace $\mathbb{R}[X]$ et donc $\mathbb{R}[X]$ n'est pas complet. □

Dans l'exemple précédent, on peut noter qu'on a envie de dire qu'il manque simplement des éléments à $\mathbb{R}[X]$ pour le rendre complet. Le procédé consistant à « boucher les trous » en ajoutant toutes les limites virtuelles des suites de Cauchy à l'espace de départ est ce qu'on appelle la *complétion*. L'espace obtenu est appelé le *complété* de l'espace de départ. C'est exactement le procédé qui donne la construction de Cauchy de $\mathbb{R}$ comme complété de $\mathbb{Q}$.

Avoir une dimension infinie n'est pas toutefois un obstacle à être complet.

Proposition 5.7

L'espace $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$ est un espace complet.

Démonstration : Voir la fin du cours. □

2 Convergence normale des séries et applications

Nous nous plaçons dans un espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$. Soit $(x_n) \subset E$ une suite de E, on considère la série $(\sum_{n\geq 0} x_n)$ qui est définie comme la suite des sommes partielles

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} x_n$$

selon le même procédé que pour les séries réelles. En particulier, on dit que la série converge si la suite des sommes partielles $(S_N)_{N\geq 0}$ converge dans E vers un point $S \in E$. On notera alors

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \ .$$

Savoir si une série converge ou pas peut être délicat (cf cours de L2 pour les séries simplement dans $E = \mathbb{R}$). Mais il existe un critère utile pour prouver la convergence qui repose sur la convergence normale (i.e. « en norme »).

Définition 5.8

On dit que la série $(\sum_{n\geq 0} x_n)$ converge normalement si la série de termes positifs réels $(\sum_{n\geq 0} \|x_n\|)$ converge dans $\mathbb{R}$.

Dans $\mathbb{R}$, la norme est la valeur absolue. La définition ci-dessus correspond donc à la convergence absolue. L'exemple des séries à termes de signe quelconque dans $\mathbb{R}$ montre qu'une série peut converger sans pour autant converger normalement. Par contre, l'implication réciproque est vraie dans les espaces complets.

Proposition 5.9

Si $(E,\|\cdot\|)$ est un espace vectoriel complet, alors toute série normalement convergente est convergente dans E.

Démonstration : Soit $U_N = \sum_{n=0}^{N} \|x_n\|$ la somme partielle de la série des normes. Comme elle converge dans $\mathbb{R}$, elle est de Cauchy et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_0 tel que, pour tout $p \geq q \geq N_0$,

$$|U_p - U_q| = \sum_{n=q+1}^{p} \|x_n\| < \varepsilon \ .$$

Mais alors, on a aussi par inégalité triangulaire

$$\|S_p - S_q\| = \| \sum_{n=q+1}^{p} x_n\| \leq \sum_{n=q+1}^{p} \|x_n\| < \varepsilon \ .$$

Ceci montre que la suite (S_N) est de Cauchy. Comme E est complet, elle converge. □

Applications aux séries de matrices :

Pour le reste de cette partie, on se place sur $\mathbb{R}^d$ muni d'une certaine norme $\|\cdot\|$. Les applications linéaires de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ peuvent être représentées par des matrices $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et on note $|||A|||$ la norme triple associée.

Commençons par voir que l'on peut définir l'exponentielle d'une matrice.

Proposition 5.10 (exponentielle de matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. La série $(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} A^n)$ est normalement convergente. Sa limite est appelée **exponentielle de** A et on note

$$e^A = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} A^n .$$

Démonstration : Par propriété de composition de la norme triple, on sait que $|||AB||| \leq \ |||A||| \cdot |||B|||$ et donc

$$|||\frac{1}{n!}A^n||| \ = \ \frac{1}{n!}|||A^n|| \ \leq \ \frac{1}{n!}|||A||| \ \leq \ \frac{1}{n!}|||A|||^n .$$

La série $(\sum |||A|||^n/n!)$ est convergente (application du critère de D'Alembert ou simplement en notant que c'est la série de $e^{|||A|||}$) et par comparaison de séries à termes positifs, la série de l'exponentielle de matrice est bien normalement convergente. □

L'exponentielle de matrice est un objet important dans l'analyse des équations différentielles et en géométrie différentielle. On peut ainsi montrer que $X(t) = e^{tA}X_0$ est la solution du système d'équations différentielles linéaires $X'(t) = AX(t)$ avec $X(0) = X_0 \subset \mathbb{R}^d$ et les exponentielles de matrices permettent de résoudre tous les systèmes de ce type.

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ qui est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_d$, alors on appelle *rayon spectral* le nombre $\rho(A) = \max |\lambda_i|$.

Proposition 5.11

Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Il existe une constante M telle que

$$\forall n \geq 0 \ , \ \ |||A^n||| \leq M\rho(A)^n . \tag{5.1}$$

En particulier, si $\rho(A) < 1$, la suite A^n tend exponentiellement vite vers 0.

Démonstration : Pour démontrer (5.1), on suppose que la diagonalisation est sous la forme $A = PDP^{-1}$. On pose $N \ : \ x \in \mathbb{R}^d \longmapsto \|P^{-1}x\|_\infty$. On vérifie directement que N est bien une norme sur $\mathbb{R}^d$. Comme toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, il existe une constante $K \geq 1$ telle que $K^{-1}\|x\| \leq N(x) \leq K\|x\|$. Enfin, on note que $Dx = (\lambda_1 x_1,\ldots,\lambda_d x_d)$ et donc que $\|Dx\|_\infty \leq \rho(A)\|x\|_\infty$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}\|A^n x\| &\leq KN(A^n x) = K\|P^{-1}A^n x\|_\infty = K\|D^n P^{-1}x\|_\infty \\ &\leq K\rho(A)^n\|P^{-1}x\|_\infty = K\rho(A)^n N(x) \leq K^2\rho(A)^n\|x\| .\end{aligned}$$

Ceci montre bien (5.1) avec $M = K^2$. □

Corollaire 5.12

Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable telle que $\rho(A) < 1$. Alors $\mathrm{Id} - A$ est inversible et son inverse est donné par la série

$$(\mathrm{Id} - A)^{-1} = \mathrm{Id} + A + A^2 + A^3 + \ldots$$

Démonstration : On utilise la convergence normale de la proposition 5.9 dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ muni de la norme triple, qui est de dimension finie et donc complet. Comme $\rho(A) < 1$, la proposition 5.11 montre que la série $\sum_{n\geq 0} A^n$ est normalement convergente et donc converge vers une matrice B. Par ailleurs,

$$(\mathrm{Id} + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^N) \cdot (\mathrm{Id} - A) = \mathrm{Id} - A^{N+1} \xrightarrow{N\to+\infty} \mathrm{Id}$$

et en passant à la limite, on trouve bien que $B(\mathrm{Id} - A) = \mathrm{Id}$ (on utilise ici que la norme triple étant une norme d'algèbre, la multiplication par $(\mathrm{Id} - A)$ est continue et on peut passer à la limite dedans). $\square$

Applications aux séries de fonctions :

On munit $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On a admis qu'il s'agit bien d'un espace complet. Soit $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Comme $(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha})$ est convergente (série de Riemann) et comme $\|\sin(n^\beta\cdot)\|_\infty \leq 1$, on obtient que la somme

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sin(n^\beta x)$$

correspond bien à une fonction continue car la série est normalement convergente. Pour $\beta = 1$, on retrouve des séries de type Fourier. La série définissant $f_{\alpha,\beta}$ converge toujours pour la norme uniforme, mais les dérivées des termes sont du type $n^{\beta-\alpha}\cos(n^\beta x)$ ce qui peut donner une série explosant rapidement si β est grand. C'est avec ce type d'idée que Karl Weierstrass et Leopold Kronecker ont découvert en 1872 la première fonction continue partout mais dérivable nul part.

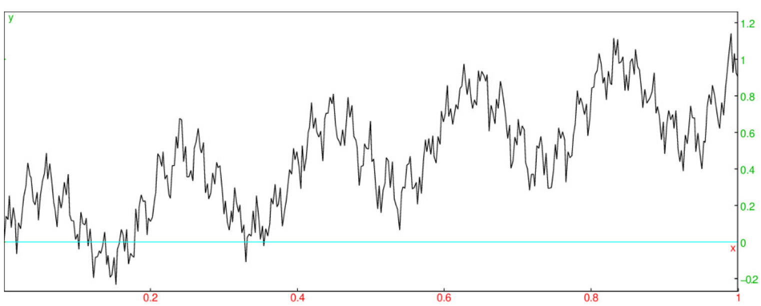


FIGURE 5.1 – *La fonction* $f_{2,5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\sin(n^5\cdot)$ *est continue mais très irrégulière.*

3 Le point fixe des applications contractantes

Nous avons déjà vu des théorèmes de points fixes. Un résultat extrêmement important avec de nombreuses applications pratiques est celui du point fixe des fonctions strictement contractantes.

Théorème 5.13 (point fixe de Picard ou point fixe de Banach)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet. Soit D un fermé de E et soit $f : D \to D$ une fonction strictement contractante, c'est-à-dire $K-$lipschitzienne avec $K < 1$. Alors f admet exactement un point fixe x_* dans D, c'est-à-dire un point tel que $f(x_*) = x_*$. En outre, pour toute donnée initiale $x_0 \in D$, la suite définie par récurrence par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers x_* exponentiellement vite.

Démonstration : Si x et x' sont deux points fixes de f dans D, alors on a

$$\|x - x'\| = \|f(x) - f(x')\| \leq K\|x - x'\|$$

avec $K < 1$. Ceci n'est possible que si $\|x - x'\| = 0$. Donc il y a au plus un point fixe pour f.
Prenons maintenant une suite définie par récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ dans D. Remarquons que comme f envoie D dans D, la suite est toujours bien définie et est contenue dans D. Nous allons montrer que cette suite est une suite de Cauchy. Soit $n \geq 1$, on a

$$\|u_n - u_{n+1}\| = \|f(u_{n-1}) - f(u_n)\| \leq K\|u_{n-1} - u_n\|$$

et par une récurrence immédiate

$$\|u_n - u_{n+1}\| \leq K^n\|u_0 - u_1\| \ .$$

Pour tous $p < q$, comme $K \neq 1$, on a alors

$$\begin{aligned}
\|u_p - u_q\| &\leq \|u_p - u_{p+1}\| + \|u_{p+1} - u_{p+2}\| + \ldots + \|u_{q-1} - u_q\| \\
&\leq (K^p + K^{p+1} + \ldots + K^{q-1})\|u_0 - u_1\| \\
&\leq \frac{K^p - K^q}{1 - K}\|u_0 - u_1\| \\
&\leq \frac{K^p}{1 - K}\|u_0 - u_1\| \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0 \ .
\end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, si p et q sont suffisamment grands, alors $\|u_p - u_q\| < \varepsilon$ et donc la suite est de Cauchy. Comme E est complet, cette suite a une limite x_* dans E. Mais comme la suite (u_n) est contenue dans D fermé, la limite x_* est aussi dans D. On sait que u_n tend vers x_* et on a aussi par continuité de f que $f(u_n)$ converge vers $f(x_*)$. Mais comme $f(u_n) = u_{n+1}$ qui converge aussi vers x_*, on a par unicité de la limite $x_* = f(x_*)$ qui est bien un point fixe de f.

Finalement, reprenons une suite (u_n) comme ci-dessus. On a par la même astuce

$$\|u_n - x_*\| = \|f(u_{n-1}) - f(x_*)\| \leq K\|u_{n-1} - x_*\| \leq \ldots \leq K^n\|u_0 - x_*\| \ .$$

Comme $K < 1$, cela montre que la convergence de toute suite récurrente vers x_* avec une vitesse exponentielle. $\square$

Exemples :

- On reprend l'algorithme de Héron pour calculer la racine carrée d'un nombre $a > 0$. On considère la fonction $f : x > 0 \longmapsto \frac{1}{2}x + \frac{a}{2x}$. On a $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ et $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2}$ donc $0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$ si $x \in [\sqrt{a},+\infty[$. Le domaine $D = [\sqrt{a},+\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$ qui est complet. La fonction f est croissante sur D et $\sqrt{a}$ est un point fixe de f. Donc f envoie D sur lui-même. Enfin, on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ sur D donc f est $\frac{1}{2}-$lipschitzienne sur D. L'application du théorème 5.13 montre que tout suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \geq \sqrt{a}$ converge vers $\sqrt{a}$.

- De manière plus générale que l'exemple de l'algorithme de Héron, supposons que x_* est un point fixe d'une fonction f telle que $|f'(x_*)| < 1$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, il existe un intervalle $D = [x_* - r,x_* + r]$ sur lequel $|f'(x)| \leq K$ pour un certain $K < 1$. Par contraction, on a forcément $f(D) \subset D$ et l'application du théorème 5.13 montre que toute suite itérative qui commence dans D converge vers x_*. On dit que x_* est un point fixe (localement) (asymptotiquement) stable pour le système dynamique $u_{n+1} = f(u_n)$ et que D est dans son bassin d'attraction.

- Le plan d'une région $D \subset \mathbb{R}^2$ est une représentation d'échelle strictement plus petite que 1 et donc la fonction qui associe à un point géographique concret sa représentation sur la carte est une contraction stricte. Si on pose un plan du département de l'Isère sur une table inclue dans le département, alors il existe un et seul point de la carte qui est exactement à l'endroit réel qui lui correspond.

Application à l'algorithme de Google

Dans l'article *The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine* (Computer Networks and ISDN Systems n°30, 1998, p. 107-117), Sergey Brin et Lawrence Page présentent l'algorithme *Page Rank* qui est derrière le moteur de recherche Google. Il est proposé de mettre un poids PR sur chaque page web et le vecteur de $\mathbb{R}^N$ ainsi formé (avec N égal au nombre de pages web connus !) doit résoudre une équation linéaire.

> ***We assume page A has pages T1...Tn which point to it (i.e., are citations). The parameter d is a damping factor which can be set between 0 and 1. We usually set d to 0.85. There are more details about d in the next section. Also C(A) is defined as the number of links going out of page A. The PageRank of a page A is given as follows:***
>
> ***PR(A) = (1-d) + d (PR(T1)/C(T1) + ... + PR(Tn)/C(Tn))***
>
> ***Note that the PageRanks form a probability distribution over web pages, so the sum of all web pages' PageRanks will be one.***

Pour être plus précis, appelons x le vecteur dont la coordonnée x_i est le poids de la page i. On considère qu'une page de poids x_j qui admet k_j liens transmet à chacune des pages référencées le poids x_j/k_j (une page est intéressante si plein de pages intéressantes pointent sur elle). Soit c_{ij} le nombre qui vaut 1 si la page j a un lien vers la page i et 0 sinon. Alors on pose $A = (a_{ij})$ avec $a_{ij} = c_{ij}/k_j$ et les poids doivent donc vérifier que $x_i = \sum_j a_{ij}x_{ij}$. Mais ce principe n'est pas satisfaisant : il y a plein de mauvaises solutions, comme $x = 0$, ou bien $x_i \neq 0$ seulement pour une page "impasse" qui ne renvoie sur aucune autre page. L'article de Brin et Page propose donc que chaque page ait un poids $(1-d)$ minimal avec $d \in]0,1[$ et que l'autre proportion d du poids provienne du mécanisme ci-dessus. Donc x doit résoudre

$$x = (1-d)\mathbb{1} + dAx$$

avec $d \in]0,1[$ et $\mathbb{1}$ le vecteur rempli de 1. La matrice A associée aux liens dans les pages web a de plus la propriété que pour tout colonne j, $\sum_i a_{ij} = 1$ et que $a_{ij} \geq 0$. On admet que $\max_j \sum_i |a_{ij}|$ est la norme triple de A associée à la norme $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbb{R}^N$ (on a vu l'expression de la norme triple pour la norme infinie qui est symétrique). Si on regarde la fonction affine $f : x \in \mathbb{R}^d \longmapsto (1-d)\mathbb{1} + dAx$, on a donc

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(x')\|_1 &= \|((1-d)\mathbb{1} + dAx) - ((1-d)\mathbb{1} + dAx')\|_1 = \|d(Ax - Ax')\|_1 \\ &\leq d\|A(x - x')\|_1 \leq d|||A|||\|x - x'\|_1 = d\|x - x'\|_1 \ .\end{aligned}$$

Comme $|d| < 1$, il s'agit d'une fonction strictement contractante et on sait qu'il existe donc un unique point fixe pour l'équation. En outre, comme on sait aussi que A est à coefficients positifs, alors on a que f envoie D sur D où D est le fermé $(\mathbb{R}_+)^d$ de $\mathbb{R}^d$. Le point fixe a donc des coefficients tous positifs : ce sont les notes de pertinences qui permettent de classer les pages. On voit aussi qu'on a une façon explicite de trouver ces notes par suite itérative, mais ce n'est pas concrètement la méthode utilisée par Google car la matrice est trop grande pour que les calculs soient assez rapides. Google utilise des méthodes probabilistes (le « surfeur aléatoire »).

Application aux équations différentielles

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $K-$lipschitizienne. On considère l'équation différentielle

$$x(0) = 0 \quad \text{et} \quad x'(t) = f(x(t)) \ .$$

On va montrer qu'il existe une unique solution à cette équation, au moins pour des temps petits. En fait, la solution est globale dans notre cas et on peut aussi prendre un cadre bien plus général, mais on ne donne ici qu'un avant-goût de ce qu'on appelle le *théorème de Cauchy-Lipschitz*. Pour $\delta > 0$ assez petit à déterminer plus tard, on considère $E = \mathcal{C}^0([-\delta,\delta],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, qui est complet. On pose $\Phi : x \in E \to y \in E$ la fonction dont l'image est définie par

$$\Phi(x)(t) = y(t) = \int_0^t f(x(s))\,\mathrm{d}s\ .$$

Pour deux fonctions x_1 et x_2 de E, on a

$$\begin{aligned}\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\|_\infty &= \max_{t\in[-\delta,\delta]} \left| \int_0^t f(x_1(s))\,\mathrm{d}s - \int_0^t f(x_2(s))\,\mathrm{d}s \right| \\ &\le \int_{-\delta}^{\delta} |f(x_1(s)) - f(x_2(s))|\,\mathrm{d}s \le \int_{-\delta}^{\delta} K|x_1(s) - x_2(s)|\,\mathrm{d}s \\ &\le \int_{-\delta}^{\delta} K \max_{\tau\in[-\delta,\delta]} |x_1(\tau) - x_2(\tau)|\,\mathrm{d}s = 2K\delta\|x_1 - x_2\|_\infty\ .\end{aligned}$$

Donc si on prend $\delta > 0$ assez petit pour que $2K\delta < 1$, la fonction Φ est strictement contractante sur E et admet un unique point fixe x qui résoud l'équation fonctionnelle

$$\forall t \in [-\delta,\delta]\ ,\ \ x(t) = \int_0^t f(x(s))\,\mathrm{d}s\ .$$

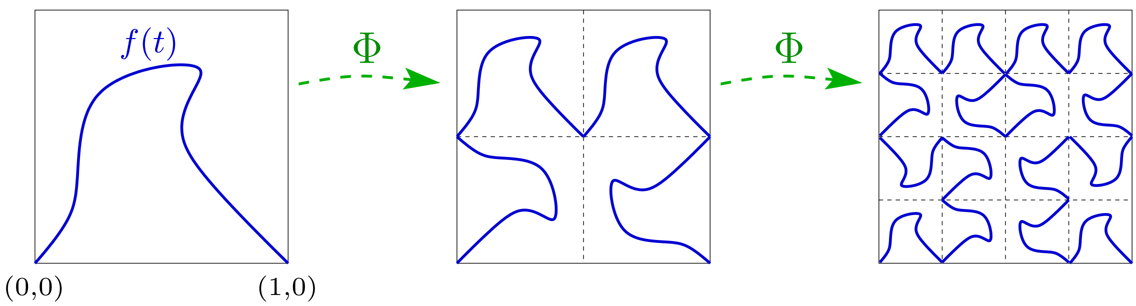
La dérivation de l'équation fonctionnelle ci-dessus nous montre que $x'(t) = f(x(t))$ et on a clairement $x(0) = 0$. Réciproquement, si x vérifie l'équation différentielle, x vérifie l'équation fonctionnelle par intégration. Donc il existe une unique solution à notre équation différentielle sur l'intervalle $[-\delta,\delta]$ où $\delta > 0$ a été choisi assez petit (on parle de solution locale).

Application à la courbe de Peano

On considère l'espace des courbes paramétrées $f(t) = (x(t),y(t))$ dans $\mathbb{R}^2$ donné par $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}^2)$ muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} \|f(t)\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} \max(|x(t)|,|y(t)|)\ .$$

On admet qu'il s'agit d'un espace complet (car il est complet pour chaque coordonnée). On appelle D le fermé de cet espace composé des courbes f telles que $f(0) = (0,0)$ et $f(1) = (1,0)$. On considère l'application Φ qui à $f \in D$ associe quatre copies de la courbe recollées comme ci-dessous.



On vérifie que Φ est bien définie car les recollements sont bien continus. On peut aussi vérifier que Φ est $1/2-$lipschitizienne car chaque copie subit une réduction de facteur $1/2$ et donc la distance entre les courbes $\Phi(f_1)$ et $\Phi(f_2)$ est moitié de celle entre les courbes f_1 et f_2 (même s'il y a 4 copies de chaque courbe). Donc Φ admet un unique point fixe et la courbe f_* correspondante est limite des itérations $\Phi^n(f)$. On peut constater qu'à l'itération n, la courbe $\Phi^n(f)$ passe par tous les points $(i/2^n, j/2^n)$. On peut prouver à la limite que f_* passera alors par tous les points du carré $[0,1]^2$. La courbe f_* est donc une courbe, objet qu'on aurait pu penser de dimension un, mais dont l'image est un carré de dimension 2. Il s'agit d'une courbe similaire à la courbe qu'a introduit Giuseppe Peano (1858-1932, Italie) pour illustrer qu'un intervalle a le même cardinal qu'un carré.