Contrôle continu n°3

Mercredi 11 décembre 2019 – 10h30-12h15

Questions de cours : Soit X un espace vectoriel et soient N_1 et N_2 deux normes sur X. Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in X$ on a $N_2(x) \leq C \cdot N_1(x)$.

1. Quelle inclusion est vraie pour les boules ouvertes $B_{N_1}(x, R_1)$ et $B_{N_2}(x, R_2)$ (on donnera le sens de l'inclusion et une condition sur les rayons et on fera une preuve complète) ?
2. Démontrer que si U est ouvert pour N_2 alors U est ouvert pour N_1.
3. Montrer que si (x_n) tend vers x pour la norme N_1, alors (x_n) tend vers x pour la norme N_2. En déduire que si K est séquentiellement compact pour N_1, alors K est séquentiellement compact pour N_2.
4. Démontrer que si C est connexe par arcs pour N_1, alors C est connexe par arcs pour N_2.

Exercice 1 : Soit $A = \mathbb{Q} \times \{-1, 1\}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. Calculer son adhérence, son intérieur et sa frontière.

Exercice 2 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On définit une operation « hop » qui agit sur les sous-ensembles de E comme suit : si $A \subset E$, alors $\text{hop}(A) = \mathring{\overline{A}}$, c'est-à-dire l'intérieur de son adhérence.

1. Montrer que si $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$ et $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.
2. Montrer que si A est fermé, alors $\text{hop}(A) \subset A$.
3. Montrer que si A est ouvert, alors $A \subset \text{hop}(A)$.
4. Pour $E = \mathbb{R}$, donner un exemple d'ensemble A tel que A est strictement plus grand que $\text{hop}(A)$ et un exemple où $\text{hop}(A)$ est strictement plus grand que A.
5. Soit x un point isolé d'un ensemble $A \subset E$, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$. Montrer que $x \notin \text{hop}(A)$.
6. Montrer que pour tout $A \subset E$, $\text{hop}(\text{hop}(A)) = \text{hop}(A)$ (*indication : on pourra commencer par justifier que* $\overline{\mathring{\overline{A}}} \subset \overline{A}$).

Exercice 3 : Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\|P\| = \int_0^1 |P(x)|\,\mathrm{d}x\ .$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Dans cette question, on se restreint aux polynômes de degré au plus d. On utilisera sans démonstration que $\|\cdot\|$ est aussi une norme sur $\mathbb{R}_d[X]$ puisqu'il s'agit d'un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$.
   (a) Montrer que

   $$N_d \ :\ P \in \mathbb{R}_d[X] \ \longmapsto\ N_d(P) = \max_{i=0,\dots,d} |P(i)| \in \mathbb{R}_+$$

   est une norme sur $\mathbb{R}_d[X]$.

   (b) Montrer que la fonction ev définie de $\mathbb{R}_d[X]$ muni de N_d dans $\mathbb{R}$ muni de $|\cdot|$ par $\mathrm{ev}(P) = P(1)$ est une application linéaire continue. Calculer sa norme triple $|||\mathrm{ev}||| = \inf\{K > 0,\ \forall P \in \mathbb{R}_d[X],\ |P(1)| \leq K.N_d(P)\}$.

   (c) Montrer que $A_d = \{P \in \mathbb{R}_d[X],\ P(1) = 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}_d[X]$ muni de la norme N_d.

   (d) En déduire que A_d est un fermé de $\mathbb{R}_d[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|$.

   (e) Montrer que A_d n'est pas un compact de $\mathbb{R}_d[X]$ (*indication : considérer la suite* $P_n = 1 + n(X-1)$).
3. Dans cette question, on considère de nouveau tous les polynômes sans restriction de degré.
   (a) Montrer que $\|X^n\|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

   (b) L'ensemble $A = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(1) = 1\}$ est-il un fermé de $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|$?

   (c) L'application ev définie de $\mathbb{R}[X]$ muni de $\|\cdot\|$ dans $\mathbb{R}$ muni de $|\cdot|$ par $\mathrm{ev}(P) = P(1)$ est-elle une application linéaire continue ?

Barème indicatif : 5/2/7/8