Contrôle continu n°3

Proposition de correction

Questions de cours : Soit X un espace vectoriel et soient N_1 et N_2 deux normes sur X. Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in X$ on a $N_2(x) \leq C \cdot N_1(x)$.

1. Soit $y \in B_{N_1}(x, R_1)$, on a par définition $N_1(x-y) < R_1$. Donc $N_2(x-y) < CR_1$ et y appartient à la boule $B_{N_2}(x, CR_1)$. On trouve donc que $B_{N_1}(x, R_1) \subset B_{N_2}(x, R_2)$ si $R_2 \geq CR_1$.
2. Par définition, U est ouvert pour N_2 si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe $R_2 > 0$ tel que $B_{N_2}(x, R_2) \subset U$. Comme $B_{N_1}(x, R_2/C) \subset B_{N_2}(x, R_2)$, on a trouvé $R_1 > 0$, égal à R_2/C tel que $B_{N_1}(x, R_1) \subset U$. Donc U est aussi un ouvert pour la topologie de N_1.
3. La suite (x_n) tend vers x pour la norme N_1 si et seulement si $N_1(x_n - x) \to 0$. Comme $0 \leq N_2(x_n - x) \leq C \cdot N_1(x_n - x)$, on a aussi que $N_2(x_n - x) \to 0$, c'est-à-dire que (x_n) tend vers x pour la norme N_2. L'ensemble K est séquentiellement compact pour N_1 si et seulement si de toute suite $(x_n) \subset K$ on peut extraire une sous-suite convergente dans K pour la norme N_1. Mais on vient de montrer que cette sous-suite converge aussi pour la norme N_2 vers la même limite donc K est aussi séquentiellement compact pour N_2.
4. En utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité, on déduit aussi de la question précédente qu'une fonction $\gamma : [0,1] \longrightarrow C$ qui est continue quand C est muni de la norme N_1 est aussi continue quand C est muni de la norme N_2. Si un arc continu pour N_1 relie deux points de C, il est aussi un arc continu pour N_2 reliant deux points de C. Donc si C est connexe par arcs pour N_1, alors C est connexe par arcs pour N_2.

Exercice 1 : Soit $A = \mathbb{Q} \times \{-1, 1\}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ (comme produit de fermés) et contient A. Il contient donc son adhérence. Soit $(x, 1)$ (resp. $(x, -1)$) un point de cet ensemble. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on peut trouver une suite $(r_n) \subset \mathbb{Q}$ telle que $r_n \to x$. Donc $(r_n, 1)$ (resp. $(r_n, -1)$) est une suite de A qui tend vers $(x, 1)$ (resp. $(x, -1)$). Donc $\overline{A} = \mathbb{R} \times \{-1, 1\}$.

Soit (x, y) un point de A, alors $(x, y + 1/n)$ est une suite qui tend vers (x, y) et n'est pas dans A. Donc $\mathring{A} = \emptyset$.

Puis on calcule $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \mathbb{R} \times \{\pm 1\}$.

Exercice 2 : On pose $\text{hop}(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$.

1. Si $A \subset B$, alors $\overline{B}$ est un fermé contenant B et donc a fortiori contenant A. L'adhérence $\overline{A}$ étant le plus petit fermé contenant A, on a $\overline{A} \subset \overline{B}$. De même, $\mathring{A}$ est un ouvert contenu dans A et donc contenu dans B. Comme $\mathring{B}$ est le plus grand ensemble avec cette propriété, $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.
2. Si A est fermé, $\overline{A} = A$ et donc $\text{hop}(A) = \mathring{A} \subset A$.
3. On a $A \subset \overline{A}$. Par la question 1, si A est ouvert, alors $A = \mathring{A} \subset \text{hop}(A)$.
4. Pour $E = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{Q}$, on a $\text{hop}(A) = \mathbb{R}$ et pour $A = \{0\}$, on a $\text{hop}(A) = \emptyset$. Il n'y a donc pas d'inclusion toujours valable en général.
5. Soit x un point isolé d'un ensemble $A \subset E$, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$. Soit $C = B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}$. Comme $C = B(x, \varepsilon) \cap (E \setminus \{x\})$, il s'agit d'un ouvert et comme par construction $C \cap A = \emptyset$, on a que $C \cap \overline{A} = \emptyset$. Donc on a encore $B(x, \varepsilon) \cap \overline{A} = \{x\}$ et donc pour tout $r > 0$, la boule $B(x, r)$ ne peut être contenue entièrement dans $\overline{A}$. Donc $x \notin \text{hop}(A)$.
6. Soit $A \subset E$. Par définition de l'intérieur, on a $\text{hop}(A) \subset \overline{A}$. En utilisant la question 1, $\overline{\text{hop}(A)} \subset \overline{\overline{A}} = \overline{A}$ puis $\text{hop}(\text{hop}(A)) \subset \overset{\circ}{\overline{A}} = \text{hop}(A)$. Par ailleurs, $\text{hop}(A)$ est un ouvert donc d'après la question 3, $\text{hop}(A) \subset \text{hop}(\text{hop}(A))$. On a bien démontré que $\text{hop}(\text{hop}(A)) = \text{hop}(A)$.

Exercice 3 : Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\|P\| = \int_0^1 |P(x)|\,\mathrm{d}x\ .$$

1. On voit facilement que $\|\cdot\|$ est une fonction bien définie de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}_+$. L'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|$ découle de l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue et la linéarité de l'intégrale. De même pour l'homogénéité. Supposons que $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $\|P\| = 0$. Comme $x \mapsto |P(x)|$ est une fonction positive et continue sur $[0, 1]$, son intégrale est nulle si et seulement si la fonction est nulle partout. Donc P s'annule sur tout $[0, 1]$ et P a une infinité de racines. Il s'agit donc du polynôme nul. Au final, on a bien que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $d \geq 1$.
   (a) On pose

   $$N_d\ :\ P \in \mathbb{R}_d[X]\ \longmapsto\ N_d(P) = \max_{i=0,\dots,d} |P(i)| \in \mathbb{R}_+$$

   De nouveau, l'inégalité triangulaire pour N_d et son homogénéité découlent de ces mêmes propriétés pour la valeur absolue. Le point délicat est la définition. Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que $N_d(P) = 0$. On doit donc avoir que $P(i) = 0$ pour $i = 0, \dots, d$. Cela donne $d + 1$ racines à P qui est de degré au plus d, donc P est le polynôme nul. Au final N_d est une norme sur $\mathbb{R}_d[X]$.

(b) On définit ev de $\mathbb{R}_d[X]$ muni de N_d dans $\mathbb{R}$ muni de $|\cdot|$ par $\mathrm{ev}(P) = P(1)$. Il s'agit d'une application linéaire puisque $(\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1)$. On a

$$|\mathrm{ev}(P)| = |P(1)| \leq \max_{i=0,\ldots,d} |P(i)| = N_d(P) \ .$$

Donc ev est une application linéaire continue et $|||\mathrm{ev}||| \leq 1$. Pour le polynôme constant $P = 1$, on a bien $|\mathrm{ev}(P)| = 1 = N_d(P)$ et donc $|||\mathrm{ev}||| = 1$.

(c) On trouve directement que $A_d = \{P \in \mathbb{R}_d[X],\ P(1) = 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}_d[X]$ muni de la norme N_d car il s'agit de $\mathrm{ev}^{-1}(1)$ et ev est continue de $\mathbb{R}_d[X]$ muni de la norme N_d dans $\mathbb{R}$.

(d) L'espace $\mathbb{R}_d[X]$ est de dimension finie et donc les normes N_d et $\|\cdot\|$ y sont équivalentes. Donc A_d est aussi un fermé de $\mathbb{R}_d[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|$.

(e) On a par contre que A_d n'est pas un compact de $\mathbb{R}_d[X]$ car il n'est pas borné. Par exemple, prenons la suite $P_n = 1 + n(X-1)$. On a $P_n(1) = 1$ mais $\|P\| = \int_0^1 1 + n(1-x)\,\mathrm{d}x = 1 + n/2 \to +\infty$.

3. Dans cette question, on considère de nouveau tous les polynômes sans restriction de degré.

(a) Un calcul direct montre que

$$\|X^n\| = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \ .$$

(b) La question précédente montre que la suite $(X^n)_n \subset \mathbb{R}[X]$ tend vers le polynôme 0 pour la norme $\|\cdot\|$. Comme $A = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(1) = 1\}$ contient tous les X^n mais pas le polynôme 0, A n'est pas fermé pour la norme $\|\cdot\|$.

(c) L'application linéaire ev définie de $\mathbb{R}[X]$ muni de $\|\cdot\|$ dans $\mathbb{R}$ par $\mathrm{ev}(P) = P(1)$ ne peut être continue puisque A n'est pas fermé alors que $A = \mathrm{ev}^{-1}(\{1\})$.