L3B – Topologie
2019-2020

Contrôle continu n°2

Mercredi 6 novembre 2019 – 8h30-11h30

Questions de cours :

1. Donner la définition de valeur d'adhérence d'une suite de nombres réels.
2. Donner la définition de point d'adhérence d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
3. Donner le lien entre les deux notions précédentes.

Pour tout $n \geq 1$, on pose $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ et on note $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{R}$ l'ensemble des valeurs de la suite.

4. Calculer l'ensemble V des valeurs d'adhérence de la suite (a_n).
5. Calculer l'ensemble $\mathrm{Ad}(A)$ des points d'adhérence de A.
6. Est-ce que $\mathrm{Ad}(A)$ coïncide avec l'ensemble des valeurs d'adhérence la suite $(a_n)_{n\geq 1}$?

Exercice 1 : Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall a \in A\ , \quad \forall b \in B\ , \quad a \ \leq \ b\ .$$

1. Montrer que tout $b \in B$ est un majorant de A et en déduire que $\sup A$ existe (sans faire la démonstration qui est la même, on admettra que $\inf B$ existe).
2. Montrer que $\sup A \leq \inf B$ (*indication : justifier que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un* $b \in B$ *tel que* $b \leq \inf B + \varepsilon$ *et que cela montre que* $\sup A < \inf B + \varepsilon$).

Exercice 2 : Ecrire le sous-ensemble réel

$$E = \big\{x \in \mathbb{R}\ ,\ \cos x \ > \ \big(e^x + \frac{1}{2}\big)\big\} \cup \big\{x \in \mathbb{R}\ ,\ \cos x \ < \ e^x\big\}$$

comme image réciproque d'un ouvert par une fonction continue.
Est-il ouvert ? Est-il fermé ? (*indication : on pourra considérer la suite* $x_n = 1/n$)

T.S.V.P.

Exercice 3 : On cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $f(0) = 1$ et $f(x + y) = f(x) \times f(y)$. On va raisonner par analyse-synthèse en supposant qu'on dispose d'une fonction f vérifiant ces propriétés.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est strictement positif (*indication : $f(x)$ est un carré et est non nul car $f(0)$ est non nul*).
2. Montrer que f est continue sur tout $\mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = f(x)^n$.
4. Soit $\lambda = \ln(f(1))$, montrer que pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, on a $f(r) = e^{\lambda r}$.
5. Montrer que si g et h sont deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et telles que $g(r) = h(r)$ pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, alors $g \equiv h$ partout.
6. Conclure.

Problème :

Toutes les questions sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre voulu.

Dans ce problème, on dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est « circulaire » si elle admet des limites finies en $\pm\infty$ et si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) \ \in \mathbb{R} .$$

On notera $\lim_{\pm\infty} f$ cette limite commune.

1. Montrer qu'une fonction circulaire continue est majorée et que son prolongement à $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ atteint son max dans le sens où soit $\sup_{\mathbb{R}} f = f(x_0)$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ soit $\sup_{\mathbb{R}} f = \lim_{\pm\infty} f$.
2. Montrer qu'une fonction circulaire continue est uniformément continue.
3. (a) Montrer que si f et g sont deux fonctions circulaires et si $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ alors $|\lim_{\pm\infty} f - \lim_{\pm\infty} g| \leq \varepsilon$.
   (b) Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions circulaires qui convergent uniformément vers $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, montrer que la limite f est circulaire.
   (*indication : commencer par montrer que $\lim_{\pm\infty} f_n$ est une suite de Cauchy grâce à la question (a) et donc qu'elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Puis montrer par inégalité triangulaire que $\ell = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x)$*).
4. Montrer qu'une fonction circulaire continue n'est jamais injective. Donner un exemple de fonction circulaire (non continue) réalisant une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Barème indicatif : 4/2/2/4/10