Contrôle continu n$^{\text{o}}$ 2

Correction

Exercice 1 : Question de cours

Soit D un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ qui est $K-$lipschitzienne pour un certain $K \geq 0$.

1. Si $K = 0$, la fonction est constante et la propriété est évidente. Sinon, soit $\varepsilon > 0$, on peut poser $\delta = \varepsilon/(2K)$. On a alors pour tous $x, y \in D$ tels que $|x - y| \leq \delta$,
$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \leq K\delta = K\frac{\varepsilon}{2K} < \varepsilon$$
ce qui montre que f est uniformément continue.
2. Comme D est non-vide, il existe $x_0 \in D$. On a alors pour tout $x \in D$
$$|f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0| \leq K|x| + K|x_0|$$
et donc
$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + |f(x) - f(x_0)| \leq K|x| + K|x_0| + |f(x_0)|$$
ce qui montre ce qui est demandé avec $a = K$ et $b = K|x_0| + |f(x_0)|$. Pour finir, si D est borné, c'est-à-dire qu'il existe C tel que $|x| \leq C$ pour tout $x \in D$, alors on a que $|f(x)| \leq aC + b$ pour tout $x \in D$, ce qui montre que f est bornée sur D.

Exercice 2 : Adhérence et union

1. Soit A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ tels que $A \subset B$. Comme $A \subset B \subset \overline{B}$, $\overline{B}$ est un fermé contenant A. Il contient donc $\overline{A}$ par définition de l'adhérence.
2. Soit A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On a $A \subset A \cup B$ donc d'après la question précédente, $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$. Symétriquement, $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ et donc $(\overline{A} \cup \overline{B}) \subset \overline{A \cup B}$. Par ailleurs, $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé comme union finie de fermés et il contient $A \cup B$ puisque $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$. Donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ par définition de l'adhérence. Au final, on a bien montré que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. Soit $(A_n)_{n=1,\ldots,N}$ une famille de N ensembles de $\mathbb{R}$. Montrons que $\overline{\bigcup_{n=1,\ldots,N} A_n} = \bigcup_{n=1,\ldots,N} \overline{A_n}$ par récurrence sur N. On sait que cela est trivialement vrai pour $N = 0$ et $N = 1$ et que c'est vrai pour $N = 2$ par la question ci-dessus. Supposons la propriété vraie pour un certain $N \in \mathbb{N}$ et prenons une famille de $N + 1$ ensembles. On a alors $\overline{\bigcup_{n=1,\ldots,N+1} A_n} = \overline{(\bigcup_{n=1,\ldots,N} A_n)} \cup \overline{A_{N+1}}$ par la question précédente, puis $\overline{(\bigcup_{n=1,\ldots,N} A_n)} = \bigcup_{n=1,\ldots,N} \overline{A_n}$ par hypothèse de récurrence, ce qui conclut.
4. La propriété n'est plus vraie pour une famille infinie. Par exemple, si on prend $A_n = [0, 1 - 1/n]$, on a $\bigcup \overline{A_n} = \bigcup A_n = [0, 1[$ qui est différent de son adhérence.

Exercice 3 : Ensemble des valeurs d'une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. On considère l'ensemble de ses valeurs

$$U = \{ u_n \, , \; n \in \mathbb{N} \} \subset \mathbb{R} \, .$$

1. L'ensemble U est dénombrable par construction et tout intervalle $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$ contient un nombre indénombrable de réels. Donc U ne peut contenir un tel segment et U ne peut être ouvert.
2. On suppose que (u_n) converge vers $0 \in \mathbb{R}$. Le réel 0 est clairement dans $\overline{U}$ puisque par hypothèse, il est limite d'une suite de points de U. Montrons que $U \cup \{0\}$ est un fermé, ce qui montrera qu'il est l'adhérence de U puisqu'on ne peut pas faire de plus petit fermé contenant U. Soit $x \notin (U \cup \{0\})$. Comme $x \neq 0$, on peut utiliser la définition de la convergence pour $\varepsilon = |x|/2 > 0$ et on obtient qu'il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n| < \varepsilon = |x|/2$ et donc $|x - u_n| > |x|/2$. Comme x n'est aucun des u_n, la distance $\delta = \min_{n<N} |x - u_n|$ est strictement positive. Si on pose $\alpha = \min(\delta, |x|/2)$, on vient de montrer que $(U \cup \{0\}) \cap]x-\alpha, x+\alpha[= \emptyset$. Donc $U \cup \{0\}$ est bien un fermé comme complémentaire d'un ouvert.
3. Considérons une suite qui tend vers 0. La question précédente nous donne exactement $\overline{U}$ et donc U est fermé si et seulement s'il contient 0. Ainsi U est fermé pour la suite $u_n \equiv 0$ mais n'est pas fermé pour $u_n = 1/2^n$.
4. Soit (u_n) une suite quelconque. Par définition du sup, pour tout $k \geq 1$, il existe un point u_{n_k} plus grand que $\sup_n u_n - 1/k$. Par ailleurs, on a toujours $u_{n_k} \leq \sup_n u_n$ et donc la suite de points $(u_{n_k})_{k\geq 1}$ converge vers $\sup_n u_n$ par encadrement. Donc $\sup_n u_n \in \overline{U}$.
5. Supposons que U n'est pas fermé et soit $x \in (\overline{U} \setminus U)$. Comme $x \in \overline{U}$, il existe au moins un point u_{n_1} dans $]x-1, x+1[$. Comme x n'est pas dans U, il existe forcément $\varepsilon_1 > 0$ tel qu'aucun des points u_n avec $n \leq n_1$ n'appartienne à $]x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1[$. Quitte à le prendre encore plus petit, on peut supposer $\varepsilon_1 < 1/2$. Mais comme $x \in \overline{U}$, on peut trouver un point u_{n_2} dans $]x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1[$. Par construction, on a forcément $n_2 > n_1$ et $|u_{n_2} - x| < 1/2$. Puis on choisit $\varepsilon_2 > 0$ avec $\varepsilon_2 < 1/4$ tel qu'aucun des points u_n avec $n \leq n_2$ n'appartienne à $]x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2[$ mais tel qu'on peut trouver un point u_{n_3} dedans… On construit ainsi une sous-suite de u_n qui converge vers x, prouvant que x est une valeur d'adhérence de u_n.

   Si (u_n) tend vers $+\infty$, elle n'a pas de valeur d'adhérence finie et donc U est fermé par l'implication contraposée à celle qu'on vient de montrer.

Exercice 4 : Image réciproque

On considère l'ensemble $A = \{ x \in \mathbb{R} \, , \; e^x > \cos x \}$.

1. L'ensemble A est l'image réciproque de l'ouvert $]0, +\infty[$ par la fonction continue $f : x \mapsto e^x - \cos x$, donc A est un ouvert de $\mathbb{R}$.
2. On pose $x_n = 1/n$. On a $e^{x_n} > 1 \geq \cos(1/n)$ et donc $x_n \in A$. Mais (x_n) tend vers 0 et $e^0 = 1 = \cos 0$ implique que $0 \notin A$. Donc A n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

Exercice 5 : Fonctions périodiques

1. On démontre facilement par récurrence que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x + T) = f(x + 2T) = \ldots = f(x + kT)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a de même que $f(x - T) = f(x - T + T) = f(x)$, ce qui permet de montrer $f(x + kT) = f(x)$ aussi pour les entiers $k < 0$.
2. Soit $T > 0$ et f une fonction $T-$périodique qui admet en $+\infty$ une limite finie $\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Soit $x_* \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$. Par convergence, il existe un rang x_0 tel que $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ pour tout $x \geq x_0$. Comme $T > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x_* + kT \geq x_0$ et donc $|f(x_*) - \ell| = |f(x_* + kT) - \ell| \leq \varepsilon$. Comme cela est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a forcément $f(x_*) = \ell$. Au final, f est constante égale à ℓ.
3. Soit $T > 0$ et soit f une fonction continue qui est $T-$périodique. Comme $[0, T]$ est un compact de $\mathbb{R}$ et f est continue, f est bornée sur $[0, T]$ et y atteint ses bornes $\max_{x\in[0,T]} f(x)$ et $\min_{x\in[0,T]} f(x)$. Mais comme f est T-périodique, $\max_{x\in[0,T]} f(x) = \max_{x\in[T,2T]} f(x) = \max_{x\in[2T,3T]} f(x) = \ldots$ et idem pour le minimum. Ceci montre qu'en fait, ces extrema sont les bornes sur tout $\mathbb{R}$.
4. Soit $T > 0$ et soit f une fonction continue qui est $T-$périodique. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $[-T, 2T]$ est un compact de $\mathbb{R}$, f est en fait uniformément continue sur $[-T, 2T]$. Donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x', y' \in [-T, 2T]$ avec $[x' - y'| < \delta$, on a $|f(x') - f(y')| < \varepsilon$. Quitte à prendre δ encore plus petit, on peut supposer que $\delta < T$. Maintenant prenons x et y dans tout $\mathbb{R}$ avec $|x - y| < \delta$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x' = x + kT \in [0, T]$. Par construction, on a alors $y' = y + kT \in [-T, 2T]$ et $|x' - y'| = |x - y| < \delta$. Donc $|f(x) - f(y)| = |f(x') - f(y')| < \varepsilon$. Ceci montre que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
5. On suppose que f est continue et $1/q-$périodique pour tout $q \in \mathbb{N}^*$. En particulier, une fois q fixé, $f(0) = f(1/q) = f(2/q) = \ldots = f(p/q)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et symétriquement $f(0) = f(-1/q) = \ldots = f(-p/q)$. Donc $f(r) = f(0)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, f est égale à $f(0)$ partout.
6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, si $x \in \mathbb{Q}$ alors $x + 1/q \in \mathbb{Q}$ et donc $f(x) = f(x + 1/q) = 1$. Mais si $x \notin \mathbb{Q}$ alors $x + 1/q \notin \mathbb{Q}$ et donc $f(x) = f(x + 1/q) = 0$. Donc f est $1/q-$périodique pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ mais n'est évidemment pas constante sur $\mathbb{R}$.