UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Feuille d'exercices 6 :
Topologie des espaces vectoriels normés

! ▶ Exercice 1 : Soient E un espace vectoriel normé et S et T deux parties de E. Étant donné X dans E, on note $\mathring{X}$ ou X° *l'intérieur* de X, *i.e.* la réunion de tous les ouverts inclus dans X, et $\bar{X}$ la *adhérence* de X, *i.e.* l'ensemble formé par toutes les valeurs d'adhérence de toutes les suites convergentes incluses dans X. Démontrer les propriétés suivantes :

(i) $\mathring{S} = \{p \in E : \exists\, \varepsilon > 0 \text{ tel que } B(p, \varepsilon) \subseteq S\}$.
(ii) $S \subseteq T$, alors $\mathring{S} \subseteq \mathring{T}$.
(iii) $(S \cap T)^\circ = \mathring{S} \cap \mathring{T}$. Qu'est-ce qui se passe avec les intersections arbitraires ?
(iv) $(S \cup T)^\circ \supseteq \mathring{S} \cup \mathring{T}$. Est-ce qu'on a l'égalité ?
(v) $\overline{(S \cup T)} = \bar{S} \cup \bar{T}$. Qu'est-ce qui se passe avec les réunions arbitraires ?
(vi) $\overline{(S \cap T)} \subseteq \bar{S} \cap \bar{T}$. Est-ce qu'on a l'égalité ?
(vii) $(E \setminus S)^\circ = E \setminus \bar{S}$.

! ▶ Exercice 2 : Soit E un espace vectoriel normé et soit $S \subseteq E$, on pose $\partial S = \bar{S} \setminus \mathring{S}$.

1. Démontrer que S est ouvert si et seulement si $S \cap \partial S = \emptyset$.
2. Démontrer que S est fermé si et seulement si $\partial S \subseteq S$.
3. Démontrer que $p \in \partial S$ si et seulement si tout voisinage de p contient un point de S et un point de $E \setminus S$. Pour $E = \mathbb{R}^d$ avec $d \geq 1$, donner des exemples d'ensembles de frontière vide ou de frontière égale à $\mathbb{R}^d$.

Exercice 3 : Pour chaque ensemble S ci-dessous, dire s'il est ouvert, fermé ou non. Calculer les ensembles $\mathring{S}$, $\bar{S}$ et ∂S.

(i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x = y\}$,
(ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 > 4\}$,
(iii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ xy > z\} \cup \{(0, 0, 0)\}$,
(iv) $\mathbb{Q} \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$,
(v) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \in \mathbb{Q}\}$,
(vi) $\mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{R}^4$.

Exercice 4 : Soit E un espace vectoriel normé et $A \subset E$.

1. Montrer que A est un ouvert si et seulement si $A \cap B(x, r)$ est un ouvert pour toute boule ouverte $B(x, r) \subset E$.
2. Montrer que A est un fermé si et seulement si $A \cap \overline{B(x, r)}$ est un fermé pour toute boule fermée $\overline{B(x, r)} \subset E$.
3. Soit $(\mathcal{O}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'ouverts telle que $\cup_n \mathcal{O}_n = E$. Montrer que A est un ouvert si et seulement si $A \cap \mathcal{O}_n$ est un ouvert pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. On se place dans $\mathbb{R}$. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la famille de fermés donnés par $F_0 =]-\infty, 0]$ et pour $n \geq 1$, $F_n = [1/n, +\infty[$. Montrer que $\cup_n F_n = \mathbb{R}$ et trouver un ensemble A qui n'est pas fermé mais tel que $A \cap F_n$ est un fermé pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 : Pour chaque $m \in \mathbb{N}^*$, on définit $U_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - m)^2 < m^2\}$. Démontrer que $\bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} U_m = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\}$. Peut-on extraire de ce recouvrement un recouvrement fini de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$? En déduire que le demi-plan supérieur ouvert n'est pas compact.

Exercice 6 : Soient S et T deux parties compactes d'un e.v.n. E. Démontrer que les ensembles $S \cap T$ et $S \cup T$ sont compacts. Qu'est-ce qui se passe avec les intersections et les réunions arbitraires ?

Exercice 7 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ réelles que l'on munit de la norme $||A||_\infty = \sup_{i,j} |a_{ij}|$.

1. Montrer que les matrices inversibles forment un sous-ensemble ouvert de E (indication : le déterminant est une application continue).
2. Montrer que l'adhérence des matrices inversibles est E tout entier (indication : $\lambda \mapsto \det(A + \lambda Id)$ est un polynôme).
3. Montrer que l'ensemble des matrices orthogonales, i.e. $\{A \in E,\ {}^tA.A = Id\}$, est un sous-ensemble fermé d'intérieur vide de E.

Exercice 8 : On munit $X = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$ associée à la convergence uniforme.

1. Montrer que l'ensemble $A = \{f \in X,\ f$ ne s'annule pas sur $[0,1]\}$ est un ouvert de X. Donner son intérieur, son adhérence et sa frontière.
2. Montrer que l'ensemble $B = \{f \in X,\ f$ s'annule en $x_0 = 1/2\}$ est un fermé de X. Donner son intérieur, son adhérence et sa frontière.
3. Montrer que l'ensemble $C = \{f \in X,\ f$ s'annule quelque part$\}$ est un fermé de X. Donner son intérieur, son adhérence et sa frontière.

★ 4. On considère l'ensemble $D = \{f \in X,\ f$ s'annule une fois et une seule sur $[0,1]\}$. Montrer que son intérieur est vide et que son adhérence est l'ensemble $\{f \in X,\ \exists\, x_0 \in [0,1],\ f(x_0) = 0$ et f est soit négative ou nulle, soit positive ou nulle sur chacun des segments $[0, x_0]$ et $[x_0, 1]\}$.

★ **Exercice 9 :** Montrer que dans $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_1$, l'ensemble $\{f \in E,\ f(0) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E qui n'est pas fermé. Quelle est son intérieur et son adhérence ?

★ **Exercice 10 :** Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. Proposer une suite de fonctions $(f_n) \in E$ telle que $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\|f_n - f_m\|_\infty = 1$ si $n \neq m$. En déduire que la boule unitée fermée de E est un fermé borné qui n'est pas compact.

Exercice 11 : Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes muni de la norme $\|P\| = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$. Montrer que la suite définie par

$$P_n = 1 + \frac{X}{2} + \frac{X^2}{4} + \ldots + \frac{X^n}{2^n}$$

est une suite de Cauchy qui ne converge pas dans $\mathbb{R}[X]$.