Feuille d'exercices 5 :
Normes

! ▶ Exercice 1 : Meilleures équivalences sur $\mathbb{R}^d$
On se place sur $\mathbb{R}^d$ muni des normes $\|\cdot\|_p$ classiques. On note $\overline{B}_p(0,r)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon $r>0$ pour la norme $\|\cdot\|_p$.

1. Pour $d=2$, trouver les rayons r_- et r_+ optimaux tels que
$$\overline{B}_1(0,r_-) \ \subset\ \overline{B}_\infty(0,1) \ \subset\ \overline{B}_1(0,r_+)\ .$$
En déduire des constantes $C_-^{1,\infty}$ et $C_+^{1,\infty}$ optimales telles que
$$\forall x\in\mathbb{R}^2\ ,\quad C_-^{1,\infty}\,\|x\|_1\ \leq\ \|x\|_\infty\ \leq\ C_+^{1,\infty}\,\|x\|_1\ .$$
2. Pour tout $d\geq 1$, trouver par des estimations les constantes $C_-^{\infty,2}(d)$ et $C_+^{\infty,2}(d)$ optimales telles que
$$\forall x\in\mathbb{R}^d\ ,\quad C_-^{\infty,2}(d)\,\|x\|_\infty\ \leq\ \|x\|_2\ \leq\ C_+^{\infty,2}(d)\,\|x\|_\infty\ .$$

Exercice 2 : Le pourquoi du nom « infini » pour la norme du sup
Soit $x\in\mathbb{R}^d$, montrer que
$$\|x\|_p=\Big(\sum_{i=1}^d |x_i|^p\Big)^{1/p}\ \xrightarrow[p\longrightarrow+\infty]{}\ \|x\|_\infty=\sup_{i=1\ldots d}|x_i|\ .$$

! ▶ Exercice 3 : Une norme sur les polynômes
Soit $\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n\in\mathbb{N}$. On choisit $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,x_n$, $(n+1)$ réels distincts. Montrer que
$$\|P\|=\sup_{i=0..n}|P(x_i)|$$
définit une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour $n=1$, $x_0=0$ et $x_1=1$, déterminer et dessiner l'ensemble des $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que les polynômes $aX+b$ forment la boule unité $B(0,1)$ de $\mathbb{R}_1[X]$ relativement à la norme ci-dessus.

Exercice 4 : L'expression $\|f\|=\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x$ définit-elle une norme

1. sur l'ensemble des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$?
2. sur l'ensemble des fonctions réelles continues sur $[0,1]$?
3. sur l'ensemble des polynomes réels d'une variable réelle définis sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5 : Norme sur les matrices
Soit $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices A de taille $n\times n$ à coefficients réels. On munit E de la norme $\|A\|=\max_{i,j}|a_{i,j}|$. Justifier qu'il s'agit bien d'une norme et qu'il existe des constantes C et C' telles que, pour tous A, B dans E et pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, on a
$$\|Ax\|_\infty\ \leq\ C\|A\|\cdot\|x\|_\infty\qquad\text{et}\qquad \|AB\|\ \leq\ C'\|A\|\cdot\|B\|\ .$$

! ▶ Exercice 6 : Un fermé borné non compact
Soit $E = \ell^\infty(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites bornées réelles $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On munit E de la norme $\|U\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. On définit la suite $(U^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ avec $u_n^k = 1$ si $k = n$ et $u_n^k = 0$ si $k \neq n$. Montrer que la suite (U^k) est une suite bornée de E dont on ne peut pas extraire de sous-suite convergente.

Exercice 7 : La topologie des fonctions lipschitziennes
Soit $\mathrm{Lip}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$, on pose

$$\|f\| \;=\; |f(0)| \;+\; \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\;.$$

Montrer que $\|\cdot\|$ est bien une norme sur $\mathrm{Lip}(\mathbb{R})$.

Exercice 8 : Équivalence de normes en dimension finie
On considère $E = \mathbb{R}_2[X] = \{aX^2 + bX + c\,,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$ l'ensemble des polynômes réels de degré au plus 2. On considère les normes

$$\|P\|_1 = \int_0^1 |P(x)|\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \|P\| = \max\big\{|a|,|b|,|c|\big\}\;.$$

1. Montrer qu'il existe C tel que $\|P\|_1 \leq C\|P\|$ et donner la meilleure constante C possible.
2. Montrons par l'absurde l'existence d'une constante $C' > 0$ telle que $\|P\| \leq C'\|P\|_1$. Montrer que si une telle constante n'existe pas, il existerait une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes non nuls telle que $\|P_n\| \geq n\|P_n\|_1$.
3. On pose $Q_n = P_n/\|P_n\|$, montrer que l'on a $\|Q_n\| = 1$ et $\|Q_n\|_1 \to 0$.
4. Montrer que l'on peut extraire une sous-suite $(Q_{\varphi(n)})$ telle que les suites des coefficients $(a_{\varphi(n)})$, $(b_{\varphi(n)})$ et $(c_{\varphi(n)})$ convergent. Montrer que leur limite est forcément 0 et obtenir une contradiction.

! ▶ Exercice 9 : Non-équivalence de normes en dimension infinie
On considère $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ que l'on munit des normes classiques

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \qquad \text{ou} \qquad \|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|\;.$$

1. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout f dans E, on a $\|f\|_1 \leq C\|f\|_\infty$ (on cherchera la meilleure constante C possible).
2. Montrer qu'il n'existe pas de constante C' telle que $\|f\|_\infty \leq C'\|f\|_1$.

Exercice 10 : Normes euclidiennes ou non
On considère un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et l'on suppose que sa norme est issue d'un produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$, c'est-à-dire que l'on a $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$.

1. Montrer que l'on a l'identité
$$\forall x, y \in E\ ,\quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\;.$$
En sachant qu'elle s'appelle *identité du parallélogramme*, lui trouver une interprétation géométrique.
2. Montrer que la norme $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbb{R}^n$ n'est pas issue d'un produit scalaire.
3. Montrer que la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ n'est pas issue d'un produit scalaire.