UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Feuille d'exercices 2 :
Borne sup et inf, valeurs d'adhérence

Exercice 1 : Algèbre des bornes supérieures
Soient A et B deux parties majorées non vides de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)$.
2. Comparer $\sup(A \cap B)$ avec $\sup A$ et $\sup B$.
3. On note $A + B = \{a + b,\ a \in A,\ b \in B\}$. Comparer $\sup(A + B)$ avec $\sup A$ et $\sup B$.

Exercice 2 : En utilisant la propriété de la borne supérieure, montrer que toute suite de réels, croissante et majorée, est convergente.

Exercice 3 : Un théorème de point fixe
Soit une application f *croissante* de $[0,1]$ dans $[0,1]$. On se propose de montrer qu'il existe un point fixe de f, c'est-à-dire un $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. Pour démontrer le résultat, on considère l'ensemble $A = \{x \in [0,1],\ f(x) \le x\}$.

1. Montrer que l'ensemble A n'est pas vide et qu'il a une borne inférieure, qu'on notera α, avec $\alpha \in [0,1]$. La suite de l'exercice a pour but de montrer que α est un point fixe de f.
2. Exploiter la croissance de f pour démontrer :
   (a) Si $x \in [0,1]$ est un minorant de A, alors $f(x)$ est aussi un minorant de A.
   (b) Si $x \in [0,1]$ est un élément de A, alors $f(x)$ est aussi un élément de A.
3. En appliquant le résultat (a) précédent au cas $x = \alpha$, montrer que $f(\alpha) \le \alpha$, autrement dit, que $\alpha \in A$. En appliquant alors le (b) précédent au cas $x = \alpha$, montrer que $f(\alpha) \ge \alpha$, et conclure.

Exercice 4 : Sur la continuité des fonctions monotones
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ croissante (le cas f décroissante est symétrique).

1. En utilisant la propriété de la borne supérieure, démontrer que f admet en tout point $x \in \mathbb{R}$ une limite à gauche et une limite à droite, que l'on notera respectivement $f(x-)$ et $f(x+)$, et que l'on a
$$\forall y < x < z\ ,\quad f(y) \le f(x-) \le f(x) \le f(x+) \le f(z)\ .$$
2. En déduire que si $f(\mathbb{R})$ est un intervalle, alors f est continue.
3. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ une subdivision d'un intervalle $[a,b]$ (c'est-à-dire que $x_0 = a$, $x_n = b$ et $x_i < x_{i+1}$ pour $i = 0, \ldots, n-1$). Montrer que $|\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i+) - f(x_i-)| \le |f(b) - f(a)|$.

★ 4. Montrer que l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ où f est discontinue est au plus dénombrable.

! ▶ Exercice 5 : Des (contre-)exemples utiles

Donner un exemple de suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

1. la suite (u_n) possède exactement k valeurs d'adhérence, pour $k = 0, 1, 2, 3$.
2. la suite (u_n) possède une seule valeur d'adhérence, et est divergente.
3. l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est $\mathbb{N}$.
4. l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est $[0, 1]$.

Exercice 6 : Vrai/faux

Soit (u_n) une suite réelle et $A \subset \mathbb{R}$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. Les assertions suivantes sont-elles toujours vraies ?

1. u_n appartient à A à partir d'un certain rang.
2. Si A est non vide, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
3. Tout intervalle $[a, b]$ ne rencontrant pas A ne contient qu'un nombre fini des u_n.
4. Pour tout $\epsilon > 0$ fixé, il n'existe qu'un nombre fini de n tels que $u_n \geq \sup A + \epsilon$.
5. Si A est borné, alors (u_n) est bornée.
6. Si $A = \emptyset$ et $u_n \geq 0$ pour tout n, alors (u_n) tend vers $+\infty$.
7. Si $v_n = u_{\phi(n)}$ est une suite extraite de u_n, et B l'ensemble de ses valeurs d'adhérence, alors B est inclus dans A.
8. Si A ne possède qu'un seul élément et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est aussi A.

! ▶ Exercice 7 : limsup et liminf

Soit (u_n) une suite réelle bornée. On définit $a_n = \inf_{k\geq n} u_k$ et $b_n = \sup_{k\geq n} u_k$.

1. Montrer que a_n et b_n convergent. On note $\underline{\lim}\, u_n$ et $\overline{\lim}\, u_n$ leurs limites respectives.
2. Montrer que si a est une valeur d'adhérence de u_n alors $\underline{\lim}\, u_n \leq a \leq \overline{\lim}\, u_n$.
3. Montrer que $\underline{\lim}\, u_n$ (resp. $\overline{\lim}\, u_n$) est la plus petite (resp. grande) valeur d'adhérence de la suite (u_n). Montrer que (u_n) converge si et seulement si $\underline{\lim}\, u_n = \overline{\lim}\, u_n$.
4. Montrer que cette notion coïncide avec

$$\overline{\lim}\, u_n = \sup\{x \in \mathbb{R}; u_n > x \text{ pour un nombre infini de } n\}.$$

★ Exercice 8 : Un intervalle de valeurs d'adhérence

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est un intervalle.

★ Exercice 9 : Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence : $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que si la suite (x_n) admet une unique valeur d'adhérence alors elle est convergente.