Préparation à l'agrégation externe
Option calcul scientifique

Université de Grenoble
2009/2010

EDO : étude locale

Variétés stables et instables

On considère le point d'équilibre $e = (1, 2)$ de l'équation différentielle

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(y(t) - x(t)) - 1 \\ y'(t) = x(t)y(t) - 2 \end{cases} \tag{1}$$

Etudier la stabilité de e et ses directions stables et instables. Tracer avec un programme Scilab les variétés stables et instables de e.

Section de Poincaré

On considère l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -(x^2(t) - 1)y(t) - x(t) \\ z'(t) = \frac{1}{10}(z(t) + y^2(t)) \end{cases} \tag{2}$$

Elle admet une solution périodique passant approximativement par le point $(0, -2.17266, -2.1555)$.
On considère la section de Poincaré par le plan $x = 0$.
1) Quelle est la période de l'orbite périodique ?
2) Calculer la différentielle de l'application de Poincaré.
3) En déduire la stabilité de l'orbite périodique et la vérifier graphiquement.
4) Montrer que si l'on perturbe légèrement l'équation différentielle (2), il existera toujours une orbite périodique proche de l'orbite initiale.
5) Retrouver la construction de l'orbite périodique étudiée ici à partir de celle de l'oscillateur de Van der Pol.