

Ecrit par Romain JOLY

Un modèle d'EDP parabolique pour la propagation d'espèces animales

1 Modélisation

L'analyse et la simulation de la propagation d'une espèce animale dans un environnement donné est un problème important en écologie. Elles permettent de prévoir l'expansion ou l'extinction d'une population animale et ainsi soit d'essayer de la sauvegarder (espèce en voie de disparition) soit de lutter contre elle (espèce invasive).

On considère ici une espèce animale dans un milieu unidimensionnel (par exemple une rivière ou un étroit corridor de forêts), que l'on modélisera par le segment $[0, 1]$. On note $u(x, t)$ la densité de la population animale au point $x \in [0, 1]$ et au temps $t \geq 0$. On suppose connue la population au temps $t = 0$ et on s'intéresse à son évolution pour $t > 0$.

Oublions dans un premier temps la dépendance spatiale du modèle. On suppose qu'il existe une densité critique $\theta \in]0, 1[$ limitant deux comportements distincts. Si $u(0) < \theta$ alors la population $u(t)$ n'est pas assez dense pour survivre tend vers 0. Ceci modélise le fait que sous une certaine densité, les animaux trouvent trop difficilement un partenaire pour la reproduction. L'espèce est aussi trop sensible aux petites fluctuations du milieu qui peuvent l'éradiquer rapidement. Si $u(0) > \theta$ alors la population survit et tend vers sa densité optimale par rapport au milieu qu'on supposera égale à 1. Ce comportement est parfaitement modélisé par l'équation différentielle ordinaire

$$u'(t) = f(u(t)) \quad \text{avec} \quad f(u) = \lambda u(1 - u)(u - \theta), \quad (1)$$

où λ est un nombre strictement positif.

On souhaite prendre en compte le fait que les animaux peuvent se déplacer spatialement. Pour cela, on rajoute à (1) un terme de diffusion $c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ où c est une constante strictement positive. En outre, on suppose que les animaux ne peuvent sortir du segment $[0, 1]$, ce qui induit une condition de flux nul sur le bord de l'intervalle. On obtient donc le modèle complet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(u(x, t)) & (x, t) \in]0, 1[\times]0, +\infty[\\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (2)$$

où $u_0(x)$ est la distribution de l'espèce animale au temps $t = 0$.

2 Existence de solutions

L'existence et l'unicité de solutions pour l'équation parabolique (2) se démontrent en deux parties : d'abord une analyse de la partie linéaire qui correspond à une équation de la chaleur, puis la prise en compte de la partie non-linéaire apportée par f grâce à la mise en place d'un théorème de point fixe de type Cauchy-Lipschitz. Nous n'allons discuter ici que du premier point.

Dans cette partie, nous allons donc analyser mathématiquement les solutions de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) & (x, t) \in]0, 1[\times]0, +\infty[\\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (3)$$

c'est-à-dire de la partie linéaire de notre modèle.

Lemme 2.1. *Soit $u_0 \in L^2(]0, 1[)$, il existe une suite de coefficients $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ telle que*

$$u_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(\pi n \cdot) ,$$

la somme étant à prendre au sens de $L^2(]0, 1[)$.

Démonstration : On prolonge la fonction u_0 par parité sur $] -1, 1[$ puis par 2-périodicité sur \mathbb{R} tout entier. Le lemme découle alors simplement de la décomposition de la fonction prolongée en série de Fourier. \square

Théorème 2.1. *Soit $u_0 \in L^2(]0, 1[)$ et soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sa suite de coefficients associée par le lemme 2.1. Alors il existe une unique solution $u : (x, t) \in [0, 1] \times [0, +\infty[\mapsto u(x, t)$ dérivable en t et deux fois dérivable en x sur $[0, 1] \times]0, +\infty[$, vérifiant (3) et telle que $u(\cdot, t)$ tend vers $u(\cdot, 0) = u_0$ au sens de $L^2(]0, 1[)$ quand t tend vers 0.*

En outre, cette solution u s'écrit

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{-c\pi^2 n^2 t} \cos(\pi n x) , \quad (4)$$

est infiniment dérivable sur $[0, 1] \times]0, +\infty[$ et tend vers la fonction constante $u_\infty = c_0 = \int_0^1 u_0(x) dx$ quand t tend vers $+\infty$.

Démonstration : Par les arguments standards de la théorie des séries de fonctions, on vérifie directement que (4) définit une solution de (3) qui vérifie toutes les propriétés énoncées.

Soit u^1 et u^2 deux solutions de (3) au sens du théorème 2.1. Alors $u = u^1 - u^2$ vérifie (3) avec $u_0 = 0$. Pour $t > 0$, par hypothèse de dérivabilité, on peut écrire

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 = \int_0^1 u(x, t) \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx = c \int_0^1 u(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) dx = -c \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right|^2 dx .$$

La norme L^2 de $u(t)$ décroît donc en temps. Or elle tend vers 0 quand t tend vers 0. Donc $\|u(t)\|_{L^2}$ est toujours nulle, ce qui prouve l'unicité de la solution de (3). \square

La partie linéaire de notre modèle (2) correspond bien au comportement attendu : la population animale se diffuse dans le milieu et finie par être uniformément répartie dans l'intervalle. En outre, la taille totale $\int_0^1 u(x, t) dx$ de la population ne varie pas au cours du temps. Ceci correspond bien au fait que la partie linéaire ne prend en compte que le déplacement des animaux et que c'est le terme $f(u)$ qui modélise les décès et les naissances dans la population.

3 Simulation numérique

L'équation aux dérivées partielles (2) est de type parabolique. Le schéma numérique associé devra être de type implicite pour ne pas exploser rapidement. On discrétise l'intervalle $[0, 1]$ en K sous-intervalles de même taille et un intervalle de temps $[0, T]$ en N sous-intervalles. On pose $dx = 1/K$ et $dt = T/N$. On représente la fonction $u(x, t)$ au temps $t = n dt$ par un vecteur $(U_{k,n})_{0 \leq k \leq K}$. Le Laplacien avec conditions aux bords de type Neumann correspond à la matrice de taille $(K + 1) \times (K + 1)$ donnée par

$$A = \frac{1}{dx^2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Le schéma numérique semi-implicite est donné par

$$U_{.,n+1} = (Id - cdt A)^{-1}(U_{.,n} + dt f(U_{.,n})) .$$

La simulation numérique de (2) montre deux possibilités : soit la population animale finit par s'éteindre, c'est-à-dire que u tend vers 0, soit elle se stabilise autour de la densité optimale, c'est-à-dire que u tend vers 1. En outre, ce comportement est monotone dans le sens suivant.

Observation 3.1. Soient u_0^- et u_0^+ deux données initiales à l'équation (2) et soient u^- et u^+ les solutions associées. On suppose que pour tout x , $u_0^-(x) \leq u_0^+(x)$. Alors $u^-(t) \leq u^+(t)$ pour tout t et donc si $u^+(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ alors $u^-(t)$ aussi et si $u^-(t)$ tend vers 1 alors $u^+(t)$ aussi.

On peut observer aussi que la propagation de l'espèce prend la forme d'un front au profil fixe et avançant à vitesse constante. Ce front s'observe si on choisit comme donnée initiale u_0 une fonction uniquement supportée par une petite partie $[0, x_0]$ du domaine. On observe que la forme et la vitesse du front semblent indépendantes de la donnée initiales.

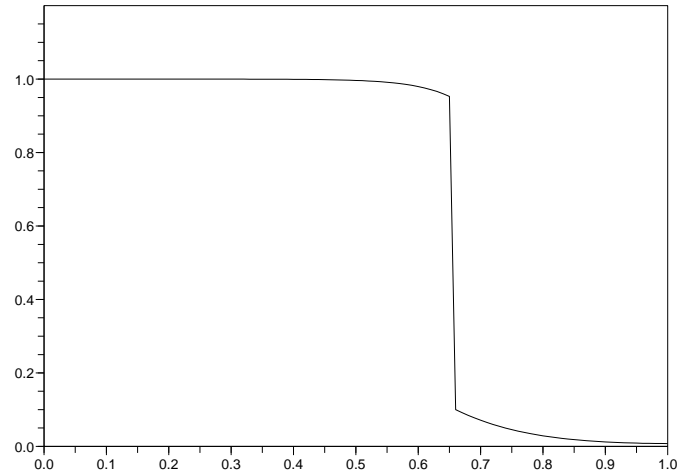


Figure 2 : l'espèce reste bloquée à gauche. Simulation pour $c = 1/20$, $\lambda = 20$ et $\alpha = 0,05$.

Dans le cas de la figure 2, la partie droite de l'intervalle n'est pas déserte, mais la population animale y est trop faible pour permettre une reproduction suffisante pour la colonisation complète du milieu. Seul le passage continu de quelques animaux depuis la partie gauche entretient une population dans la partie droite.

Suggestions de développement :

- commenter pour l'équation différentielle ordinaire (1) l'existence de solutions et leur comportement qualitatif.
- détailler les arguments mathématiques de la partie 2
- illustrer numériquement le théorème 2.1
- illustrer numériquement l'observation 3.1
- calculer numériquement la vitesse du front décrit dans la figure 1.