Schémas numériques pour les EDP

Discrétisation du Laplacien

On considère l'opérateur Laplacien $\Delta = \partial_{xx}^2$ sur $\mathcal{C}^2((0,1))$. La discrétisation par éléments finis est de la forme suivante. Le segment $(0,1)$ est discrétisé en $n+1$ points $x_0 = 0$, $x_1 = \delta x$, …, $x_{n+1} = 1$ avec $\delta x = 1/n$. La discrétisation du Laplacien est principalement une matrice tridiagonale A, mais il faut faire attention aux conditions aux bords. Les cas homogènes classiques sont :

Dirichlet $u(0) = u(1) = 0$	$A = \frac{1}{\delta x^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
Neumann $u_x(0) = u_x(1) = 0$	$A = \frac{1}{\delta x^2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
Periodique $u(0) = u(1)$ et $u_x(0) = u_x(1)$	$A = \frac{1}{\delta x^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 1 : Résoudre numériquement une équation du type $\Delta u = f$ avec différentes conditions aux bords. Comment gérer le cas de conditions non-homogènes $u(0) = 1$ et $u(1) = -2$? Comment gérer le cas de conditions de Robin $u(0) + \alpha u_x(0) = 0$ et $u(1) + \alpha u_x(1) = 0$?

Exercice 2 : Spectre du Laplacien

On veut trouver les valeurs propres de l'opérateur

$$-\partial_{xx}^2 + x^2 \ : \ \begin{pmatrix} \mathbb{H}^2(]0,1[) \cap \mathbb{H}_0^1(]0,1[) & \longrightarrow & \mathbb{L}^2(]0,1[) \\ u & \longmapsto & -u'' + x^2 u \end{pmatrix}$$

Autrement dit, on cherche les $\lambda > 0$ tels que

$$\begin{cases} u'' - x^2 u + \lambda u = 0 \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \end{cases}$$

ait une solution non nulle.
1) Utiliser la commande `spec` de Scilab sur une discrétisation de $-\partial^2_{xx} + x^2$ pour obtenir son spectre.
2) On utilise une méthode de tir. On note que l'on peut se restreindre à chercher les fonctions propres vérifiant $u'(0) = 1$. On considère la fonction

$$\lambda \longmapsto u_\lambda(1) \quad \text{où} \quad u_\lambda \text{ est solution de } \begin{cases} u_\lambda'' - x^2 u_\lambda + \lambda u_\lambda = 0 \\ u_\lambda(0) = 0, \quad u_\lambda'(0) = 1 \end{cases}$$

On cherche les zéros de cette fonction par une méthode de Newton ou une dichotomie.

Schéma pour les EDP

Exercice 3 : Discrétisation d'équations paraboliques
On regarde une équation de réaction-diffusion

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + f(t,x,u(x,t)) \quad (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+$$

avec des conditions aux bords (Dirichlet homogène par exemple). En reprenant la discrétisation précédente du Laplacien et un schéma en temps type Euler, on aboutit à deux discrétisations possibles :
• le schéma explicite $U_{n+1} = U_n + \delta t(AU_n + f(t_n, x, U_n))$
• le schéma semi-implicite $U_{n+1} = U_n + \delta t(AU_{n+1} + f(t_n, x, U_n))$ i.e. $U_{n+1} = (Id - \delta t A)^{-1}(U_n + \delta t f(t, x, U_n))$.
Observer la stabilité des schémas pour différentes valeurs de $\delta t / \delta x^2$. Comment expliquer les différences constatées ?

Exercice 4 : Discrétisation des équations de transport
On considère l'équation de transport la plus simple qui soit

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \qquad \text{et} \qquad u(x,0) = u_0(x) \ ,$$

où c est une vitesse constante.
Quelle est la solution théorique ? Quelles sont les conditions aux bords à mettre pour que l'équation soit bien posée ?

Suivant la discrétisation envisagée pour la dérivée spatiale, on aboutit à trois principaux schémas :
• schéma amont $(u^j_{n+1} - u^j_n)/\delta t + c(u^{j+1}_n - u^j_n)/\delta x = 0$,
• schéma aval $(u^j_{n+1} - u^j_n)/\delta t + c(u^j_n - u^{j-1}_n)/\delta x = 0$,
• schéma centré $(u^j_{n+1} - u^j_n)/\delta t + c(u^{j+1}_n - u^{j-1}_n)/2\delta x = 0$.
Tester pour des conditions aux bords périodiques $u(0) = u(1)$ les schémas amont, aval et centré pour différentes valeurs de c. On observera en particulier ce qui se passe en fonction du signe de c et de sa position par rapport à $\delta x/\delta t$.

Exercice 5 : Equation des ondes
On considère l'équation des ondes

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases} \quad , \quad u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad \partial_t u(x,0) = 0 \ . \tag{1}$$

Utiliser la discrétisation de la dérivée seconde sous la forme $\frac{u_{n+1}+u_{n-1}-2u_n}{\delta t^2}$ pour simuler l'équation des ondes. Considérer la stabilité du schéma en fonction du rapport dx/dt. Observer comment les ondes se réfléchissent sur les bords pour la condition de Dirichlet et pour la condition de Neumann.

Exercice 6 : Méthode de Galerkin (méthode spectrale)
On reprend l'équation des ondes (1). En décomposant la fonction $u(x,t)$ sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} c_n(t) \sin(n\pi x) \ ,$$

résoudre explicitement l'équation des ondes. En ne considérant que les premiers modes de Fourier, présenter une simulation approchée de (1).

Exercices pratiques

Exercice 7 : Méthode de descente
On souhaite résoudre sur un rectangle Ω l'équation $\Delta u = \lambda u + f$, avec $\lambda > 0$ et des conditions aux bords de type Dirichlet. On note que u est le minimiseur de l'énergie $E(u) = \int_\Omega |\overrightarrow{\nabla} u|^2 + \lambda |u|^2 + fu$. On discrétise le problème en remplaçant u pour une matrice de valeurs $U^{i,j}$. Quelle est la discrétisation de l'équation ? De l'énergie ? La méthode de relaxation à pas optimale pour ce problème consiste à modifier une par une les valeurs $U^{i,j}$ par la valeur donnant l'énergie la plus petite, les autres valeurs $U^{i',j'}$ étant fixées. Quelle est la nouvelle valeur de $U^{i,j}$ obtenue en fonction des valeurs voisines ? On recommence en parcourant ainsi plusieurs fois la matrice. Programmer l'algorithme correspondant et discuter de sa convergence.

Exercice 8 : Un système de réaction-diffusion
On considère le modèle de Lotka-Volterra pour l'évolution d'un écosystème comprenant des densités $u(t)$ de proies et $v(t)$ de prédateurs.

$$\begin{cases} u'(t) & = 4u(t) - u(t)v(t) \\ v'(t) & = -v(t) + u(t)v(t) \end{cases}$$

Quel est le comportement qualitatif de ce système ?
On introduit maintenant une dimension spatiale au problème : le milieu est représenté par un intervalle $[0,1]$. On suppose que le milieu n'est pas homogène. Par exemple, on suppose que les proies ne se reproduisent que dans un intervalle $I \subset [0,1]$. Le problème devient

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = c\Delta u(x,t) + 4\chi_I(x)u(x,t) - u(x,t)v(x,t) & (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_t v(x,t) = c\Delta v(x,t) - v(x,t) + u(x,t)v(x,t) & (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_x u(0,t) = \partial_x u(1,t) = \partial_x v(0,t) = \partial_x v(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = u_0 \quad v(x,0) = v_0 & x \in (0,1) \end{cases}$$

où $c = 1/10$ est le coefficient de diffusion des espèces animales.
Simuler le comportement qualitatif de ce système ? Discuter du modèle et proposer des systèmes similaires.

Exercice 9 : Pénétration de la chaleur dans le sol
La chaleur pénètre dans le sol suivant l'équation classique de la chaleur $u_t = \Delta u$. On s'intéresse à la répercussion des variations de température extérieure dans la profondeur du sol. Proposer un modèle et l'étudier numériquement.

Exercice 10 : Un modèle d'autoroute
On considère une autoroute modélisée par la droite réelle. Soit $u(x,t)$ la densité de voitures en $x \in \mathbb{R}$ à l'instant t. Le flux de voitures suit l'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c(u(x,t))\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \ ,$$

où la vitesse c dépend de la densité du trafic.
Proposer une fonction c adequat et observer numériquement le modèle.

Exercice 11 : Transmission d'une onde à une interface
Dans un milieu donné, les ondes se propagent selon l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \ ,$$

où c est la vitesse du son dans ce milieu.
On souhaite comprendre comment se comporte une onde passant d'un milieu à un autre où la vitesse du son est différente. Proposer un modèle et effectuer des simulations numériques.