Feuille d'exercices 2 : suites numériques

Exercice 1 : Échauffement
Étudier la convergence des suites de termes généraux

$$u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n} \qquad v_n = \frac{n \sin n}{n^2+1} \qquad w_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\cos n$$

Exercice 2 : Suites arithmético-géométriques
On considère une suite (u_n) définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la récurrence

$$u_{n+1} = au_n + b$$

avec $a,b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 1$ (si $a = 1$, il s'agit simplement d'une suite arithmétique).

1. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $v_n = u_n + r$ soit le terme général d'une suite géométrique (v_n).
2. En déduire une expression générale de u_n en fonction de n, u_0, a et b.
3. On considère la température (T_n) d'un objet placé initialement à 220 ° C dans une pièce à température de 20 ° C supposée constante. Le temps n est compté en minutes. La loi de Fourier montre que $T_{n+1} - T_n = -\alpha(T_n - 20)$ avec $\alpha > 0$ un coefficient dépendant des matériaux et de la géométrie de l'objet. Justifier que (T_n) est une suite arithmético-géométrique. Après 10 minutes, l'objet n'est plus qu'à 120 ° C, quelle sera sa température après 20 minutes ?

Exercice 3 : Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \binom{2n}{n} 2^{-2n}$.

1. Montrer que $\forall n \geq 1, u_n = \dfrac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}$.
2. Montrer que $\forall n \geq 1, \dfrac{u_n}{u_{n+1}} > 1$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.

Exercice 4 : Unicité de la limite
Montrer que si une suite (u_n) tend vers $+\infty$, alors elle ne peut pas converger vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 : Suites d'entiers
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que (u_n) converge si et seulement si elle est stationnaire, c'est-à-dire qu'elle est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 6 : A propos de la définition de la limite
Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire qui vérifie la propriété

$$(A) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \ \ |u_n - \ell| < \varepsilon \ .$$

Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes à (A) :

$$(B) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \ \ |u_n - \ell| \leq \varepsilon \ ,$$

$$(C) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \ \ |u_n - \ell| < 42\varepsilon \ ,$$

$$(D) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \ \ |u_{n+3} - \ell| < \varepsilon \ .$$

Montrer que les propositions suivantes ne sont pas équivalentes à (A) :

$$(E) \quad \forall \varepsilon \geq 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \ \ |u_n - \ell| < \varepsilon \ ,$$

$$(F) \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \forall n \geq n_0, \ \ |u_n - \ell| < \varepsilon \ .$$

Exercice 7 : Opérations sur les limites
Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes vers ℓ et $\ell' \in \mathbb{R}$ respectivement.

1. En revenant à la définition de la convergence, montrer que la suite $(u_n - 2v_n)$ est convergente vers $\ell - 2\ell'$.
2. On suppose que $\ell' \neq 0$. En revenant à la définition de la convergence, montrer que la suite (u_n/v_n) converge vers ℓ/ℓ'.

★ **Exercice 8 : Convergence des sous-suites**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$. Que pensez-vous des propositions suivantes ?

(a) Si (u_n) converge alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent aussi.
(b) Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes, alors il en est de même pour (u_n).
(c) Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors il en est de même pour (u_n).

Exercice 9 : Divergences

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ n'est pas convergente.
2. ★ Nous allons montrer que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.
   (a) En utilisant que $\sin(n+1) + \sin(n-1) = 2\sin(n)\cos 1$, montrer que si $\sin n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors $\ell = 0$.
   (b) En utilisant que $\cos^2(n)\sin^2(1) = \big(\sin(n+1) - \sin(n)\cos 1\big)^2$, montrer que si $\sin n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors $\ell \neq 0$.
   (c) Conclure.

Exercice 10 : Procédé géométrique d'approximation de $\sqrt{2}$
On utilise la méthode de Héron pour approcher $\sqrt{2}$. On considère une suite de rectangles de longueurs (a_n), de largeurs (b_n) et d'aire 2, c'est-à-dire que $a_n > b_n$ et $a_n b_n = 2$. Plus précisément, on part de $a_1 = 2$ et $b_1 = 1$ et à chaque étape le rectangle suivant est rendu « plus carré » en prenant $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = 2/a_{n+1}$.

1. Montrer que $a_{n+1} = a_n/2 + 1/a_n$ et en déduire que $a_n > \sqrt{2}$ pour tout n (on pourra étudier la fonction $x \mapsto x/2 + 1/x$).
2. Démontrer qu'on a bien $b_n < \sqrt{2} < a_n$ pour tout n, que (a_n) est décroissante et que (b_n) est croissante.
3. En déduire que les deux suites convergent et donner leur limite.
4. ★ Calculer $a_{n+1} - b_{n+1}$ en fonction de $a_n - b_n$ et a_n. Montrer que $a_n - b_n < \frac{(a_{n-1}-b_{n-1})^2}{4}$.
5. ★ Calculer les premiers termes de la suite $a_1, a_2, \ldots, a_6$. Combien de décimales exactes de $\sqrt{2}$ obtenez vous a chaque pas ?

Exercice 11 : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

1. Trouver une formule pour le terme général u_n des suites suivantes
   (a) $u_0 = 1, u_1 = 2, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
   (b) $u_0 = 1, u_1 = 3, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
   ★ (c) Dans $\mathbb{C}$, $u_0 = 1, u_1 = i, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n$.
2. ★ On note I_n le nombre de façon d'écrire l'entier $n \in \mathbb{N}$ sous forme d'une somme d'entiers impairs, en comptant comme différentes des sommes qui diffèrent par des commutations. Par exemple $I_4 = 3$ car 4 s'écrit $1+1+1+1$ mais aussi $1+3$ ou $3+1$. Montrer que I_n suit la suite de Fibonacci et calculer combien il y a de façon de décomposer 100 en sommes d'entiers impairs.

Exercice 12 : Irrationnalité de e
On considère les deux suites de termes généraux

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}\ .$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont deux suites adjacentes et en déduire qu'elles convergent vers une même limite qu'on note e.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $u_n < e < v_n$ (inégalités strictes !).
3. ★ Montrer que e est irrationnel (indication : si $e = p/q$, multiplier l'inégalité précédente pour $n = q$ par $q!$).

Exercice 13 : Suites récurrentes
On considère une fonction f définie et continue sur un segment $I = [a,b]$ telle que $f(I) \subset I$. On définit une suite par

$$u_0 \in I \quad \text{et } u_{n+1} = f(u_n) \ .$$

1. Montrer que $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que si la suite est convergente, alors sa limite ℓ appartient à I et vérifie l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire que ℓ est un point fixe de f.
2. On suppose que f vérifie

$$\forall x \in I,\ \ f(x) \leq x \qquad \text{ou bien} \qquad \forall x \in I,\ \ f(x) \geq x \ .$$

   Montrer que la suite (u_n) est monotone et convergente. Application : étudier la suite définie par $u_0 \in [0,2]$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}u_n^2$.
3. On suppose maintenant que f a deux points fixes $\alpha < \beta$ et aucun autre point fixe dans $]\alpha,\beta[$. On suppose aussi que f est croissante sur $[\alpha,\beta]$. Montrer que f envoie $[\alpha,\beta]$ sur lui-même et qu'on est dans la situation d'appliquer la question précédente à $\tilde{I} = [\alpha,\beta]$.
4. En déduire que si $f : I \to I$ est continue et croissante, la suite (u_n) est monotone et convergente (on pourra supposer qu'il n'y a qu'un nombre fini des points fixes $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ et découper I en sous-intervalles adéquats).
5. ★ Montrer que si f est décroissante, alors $f^2 := f \circ f$ est croissante. En déduire que les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et convergentes et que leurs limites vérifient l'équation $f \circ f(x) = x$. Donner un exemple où la limite n'est pas un point fixe mais un cycle de période 2.
6. Il est important que $I = [a,b]$ soit fermé et borné pour obtenir la convergence de la suite. Comme contre-exemple, montrer que la suite définie par $u_0 \geq 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ diverge bien que $f(x) = x + 1/x$ soit croissante sur $[1,+\infty[$.

★ Exercice 14 : Suite de Conway
On regarde la suite dite « *look and say* » dont les premiers termes sont 1, 11, 21, 1211, 111221, 312211...

1. Comment est construite la suite ?
2. Montrer que les seuls chiffres qui apparaissent sont 1, 2 et 3.
3. Montrer que les séquences 111 et 222 peuvent apparaître mais que la séquence 333 n'apparait jamais.