Chapitre 5 : Les fonctions usuelles

On appelle *fonctions usuelles* les fonctions qui sont suffisamment utilisées pour qu'on leur donne un nom et qu'on connaisse par cœur leurs propriétés élémentaires. La liste des fonctions usuelles dépend donc de l'usage qu'en fait la personne et donc du domaine des sciences considéré. La liste qui suit est à comprendre au sens de l'analyse élémentaire en première année post-bac. Nous faisons le choix de ne pas y inclure les fonction trigonométriques hyperboliques et leurs réciproques. Elles seront quand même vues pendant les TD.

Notons qu'il est évidemment impossible de donner un nom à toutes les fonctions. Il est même impossible d'avoir une liste de fonctions usuelles qui s'auto-satisfait à elle-même dans le sens où quelle que soit cette liste, on pourra toujours les combiner pour écrire une formule dont aucune primitive ne pourra s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles de cette liste.

Il y aura quelques informations nouvelles dans ce chapitre, mais son but est aussi de lister des propriétés connues pour obtenir un formulaire plus ou moins condensé. Il y a quelques informations culturelles superflues qui ne sont évidemment pas à connaître par cœur. Le plus important est de connaître l'allure du graphe et avec lui les valeurs particulières et les limites de la fonction. Ensuite, il faut connaître les dérivées et les primitives (sauf celle du logarithme qui est mentionnée mais sera mieux revue plus tard). À cela s'ajoutent les développements limités qui étaient déjà dans le chapitre précédent. Pour finir, la technique de construction de la réciproque est à bien comprendre et permet en particulier de retrouver les fonctions trigonométriques réciproques sans trop d'efforts.

1 Polynômes réels

$$P \ : \ x \in \mathbb{R} \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout i. Si on a bien $a_n \neq 0$, on dit que n est le degré du polynôme P. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n.

Histoire :

Depuis les débuts de l'écriture il y a 5.000 ans, les humains savent poser les calculs comme les additions ou les multiplications. Les polynômes sont donc utilisés depuis toujours. Les seuls calculs que l'on peut faire de façon exacte sont les quotients de polynômes, ce qui explique pourquoi ceux-ci sont omniprésents et pourquoi on cherche à approcher les autres fonctions par des polynômes. Par exemple, la police de caractère dans laquelle est écrit ce polycopié est codée à l'aide de polynômes.

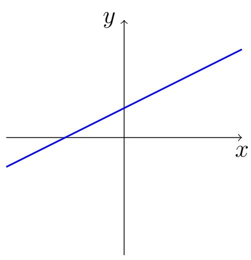
Dérivée :

$$P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + 2 a_2 x + a_1$$

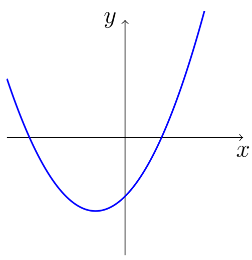
Primitive :

$$\int^x P(s)\,\mathrm{ds} = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \ldots + \frac{a_2}{3} x^3 + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + \text{cte}$$

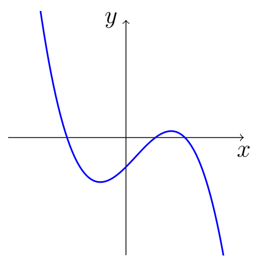
Le théorème fondamental de l'algèbre nous garantit qu'un polynôme de degré n n'a pas plus que n racines réelles en comptant leur multiplicité. Cela signifie par dérivation qu'un polynôme de degré n change au plus $n-1$ fois de sens de variation.



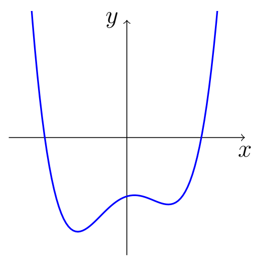
Un polynôme de degré 1



Un polynôme de degré 2



Un polynôme de degré 3



Un polynôme de degré 4

2 Construire des fonctions réciproques

Si f est une fonction bijective d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ dans un ensemble $F \subset \mathbb{R}$, alors il existe une unique fonction $g : F \to E$ telle que $g \circ f$ est l'identité sur E et $f \circ g$ est l'identité sur F. On a alors

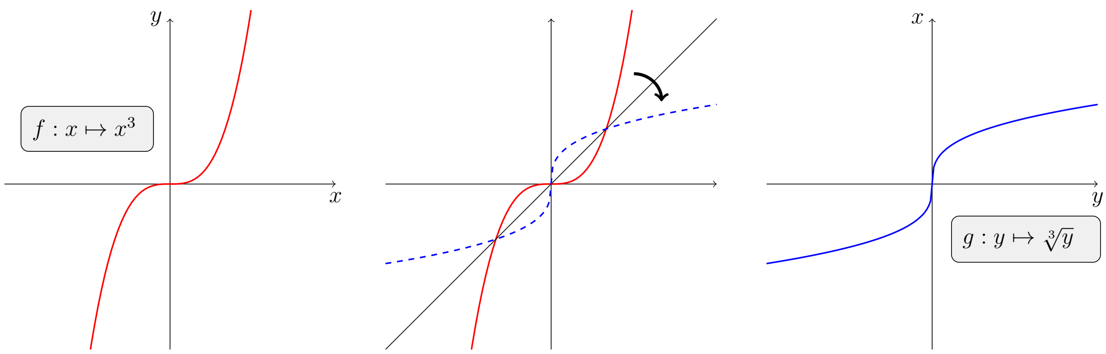
$$\forall x \in E \ , \ \ \forall y \in F \ , \ \ f(x) = y \ \Leftrightarrow \ g(y) = x \tag{5.1}$$

ce qui permet de faire le lien entre les valeurs de f et celles de g, entre le graphe de f et celui de g, d'étudier la continuité ou la dérivabilité de g etc. Quand la fonction f est bijective, c'est donc assez simple. Mais il arrive souvent qu'on cherche à construire la réciproque d'une fonction qui n'est pas bijective. Pour comprendre les mécanismes en jeu, nous allons regarder deux exemples concrets.

Exemple d'un cas simple : construction de la racine cubique
On cherche une réciproque à la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^3 \in \mathbb{R}$. On peut facilement montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (f est strictement croissante et les limites en $\pm\infty$ ainsi que le théorème des valeurs intermédiaires assurent que f est surjective). On peut donc introduire une fonction réciproque $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que l'on note $y \mapsto \sqrt[3]{y}$ et qu'on appelle *racine cubique*. Celle-ci vérifie donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ \ \sqrt[3]{x^3} = x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in \mathbb{R} \ , \ \ \left(\sqrt[3]{y}\right)^3 = y \ .$$

Notons qu'il n'est pas forcément évident de calculer les valeurs $g(y)$ (on peut utiliser la méthode de dichotomie sur l'équation $g(y)^3 = y$ mais on aura juste une valeur approchée). Par contre, il est facile de trouver le graphe de g, et donc ses limites, ses valeurs particulières etc. En effet, la symétrie (5.1) nous dit que le graphe de g se déduit de celui de f en échangeant les rôles de x et y, donc en faisant une symétrie par rapport à la première bissectrice.



La continuité d'une réciproque peut être un peu subtile, mais ce n'est pas le cas si E et F sont des intervalles de $\mathbb{R}$: la racine cubique ainsi construite est bien continue. Pour la dérivabilité, on utilise le théorème 3.36 : g est dérivable pour $y \neq 0$ (seul point où $f'(y) = 0$) et

$$\forall y \neq 0 \ , \ \ g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{3g(y)^2} = \frac{1}{3} y^{-2/3} \ .$$

Dans cet exemple, nous avons bien pris garde de séparer deux copies de $\mathbb{R}$: E (variable x) et F (variable y). Mais dans la pratique, on fait rarement aussi bien la distinction, ce qui peut amener à des confusions.

Exemple d'un cas plus complexe : construction de la racine carrée
On cherche à construire une réciproque au carré $f\ :\ x \in \mathbb{R}\ \longmapsto\ x^2 \in \mathbb{R}$. C'est très naturel, mais cette fois-ci il y a un gros problème : f n'est pas une bijection ! Non seulement elle n'est pas surjective car elle n'atteint aucun $y < 0$, mais elle n'est pas injective non plus car tout $y > 0$ admet deux antécédents. L'étape clef est donc la sélection d'une branche $\tilde{f}\ :\ x \in E \subset \mathbb{R}\ \longrightarrow\ x^2 \in F \subset \mathbb{R}$ de la fonction f telle que $\tilde{f}$ soit une bijection de E dans F. Pour cette étape, plusieurs choix sont possibles. Mais on cherche d'une part à prendre la branche la plus grande et d'autre part une branche utile et agréable à manier. Ici, nous avons principalement le choix entre la branche $x \in\ ]-\infty,0] \mapsto x^2 \in [0,+\infty[$ et la branche $x \in [0,-\infty[\ \mapsto x^2 \in [0,+\infty[$. Naturellement, les scientifiques passés ont choisi la branche positive (ne serait-ce que parce que la racine carrée était déjà utilisée pendant la Haute Antiquité, à une époque où les nombres négatifs n'existaient pas encore). On définit donc $g : y \in \mathbb{R}_+ \to \sqrt{y} \in \mathbb{R}_+$ comme la réciproque de la fonction $\tilde{f}\ :\ x \in \mathbb{R}_+\ \longrightarrow\ x^2 \in \mathbb{R}_+$ mais attention *ce n'est pas la réciproque de la fonction* $f\ :\ x \in \mathbb{R}\ \longmapsto\ x^2 \in \mathbb{R}$. Cela se traduit par exemple par le fait que si on a bien

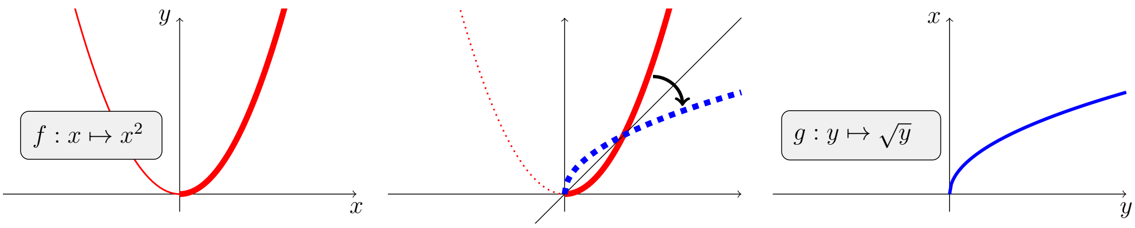
$$\forall y \geq 0\ ,\ \left(\sqrt{y}\right)^2 = y \qquad \text{et} \qquad \forall x \geq 0\ ,\ \sqrt{x^2} = x\ ,$$

il est faux de dire que $\sqrt{x^2} = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, même si l'expression $\sqrt{x^2}$ a bien un sens. C'est la symétrie de f qui permet ensuite d'obtenir que

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \sqrt{x^2} = |x|\ .$$

Mais en général, on n'aura pas forcément un lien entre g et les branches non utilisées de f.

La construction du graphe et donc des limites et valeurs particulières se fait comme pour la racine cubique. Mais il faut bien faire attention à la branche $\tilde{f}$ de f qui est utilisée.



Pour finir, on peut encore utiliser le théorème 3.36 : g est dérivable pour $y > 0$ et on a

$$\forall y \neq 0\ ,\ g'(y) = \frac{1}{\tilde{f}'(g(y))} = \frac{1}{2g(y)} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\ .$$

3 Fonctions puissances

$$f \ : \ x \in \left]0, +\infty\right[\longmapsto x^\alpha := e^{\alpha \ln x}$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, x^α est bien défini pour $x > 0$. Si $\alpha \geq 0$, on peut prolonger la fonction par continuité en zéro en posant $0^\alpha = 0$. La définition $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ est la seule possible si α est un réel quelconque. Si α est entier, il s'agit d'un polynôme ou de l'inverse d'un polynôme et on peut définir la fonction pour $x < 0$. Si α est rationnel, on retrouve les racines construites comme réciproque des puissances entières et on peut parfois définir $x \mapsto x^\alpha$ sur tout $\mathbb{R}$ (voir le paragraphe précédent).

Histoire :

La racine carrée était déjà connue au début de l'écriture par les mésopotamiens et les égyptiens. La définition quand α n'est pas rationnel n'a été comprise qu'autour du milieu du 18ème siècle avec la formalisation de l'exponentielle.

Dérivée :

Si $x > 0$ $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$

(formule parfois prolongeable en 0 *ou sur* $\mathbb{R}$ *suivant les valeurs de* α*)*

Primitive :

$$\int^x s^\alpha \, \mathrm{ds} = \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + \text{cte si } \alpha \neq -1$$

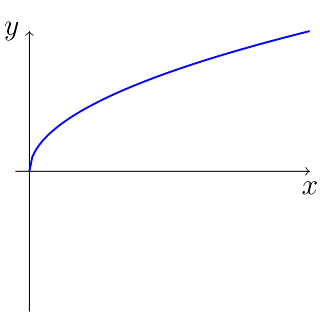
$$\int^x s^{-1} \, \mathrm{ds} = \ln |x| + \text{cte}$$

Développement limité :

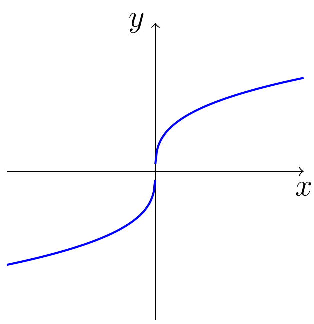
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \quad \text{quand } x \longrightarrow 0$$

Formules :

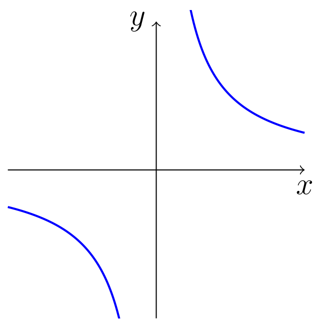
$x^{-\alpha} = 1/x^\alpha \qquad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta} \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$



$x \mapsto x^{1/2} = \sqrt{x}$



$x \mapsto x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$



$x \mapsto x^{-1} = \frac{1}{x}$

4 Le logarithme

$$x \in]0, +\infty[\longmapsto \ln x$$

Histoire :

Au début du 17ème siècle, les astronomes comme Tycho Brahé et Johannes Képler font des calculs littéralement astronomiques pour comprendre les trajectoires des planètes. Pour simplifier les calculs, John Napier (1550-1617, Écosse) introduit la notion de logarithme qui transforme via sa formule $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ les multiplications en simples additions, beaucoup plus rapides à effectuer. L'idée, publiée en 1614, sera très rapidement reprise par Képler et Briggs et la théorie du logarithme sera complétée en quelques années.

Dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x}$$

Primitive :

$$\int^x \ln s \, \mathrm{d}s = x \ln x - x + \mathrm{cte}$$

Développement limité :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n) \quad \text{quand } x \longrightarrow 0$$

Valeurs particulières :

$\ln 1 = 0$

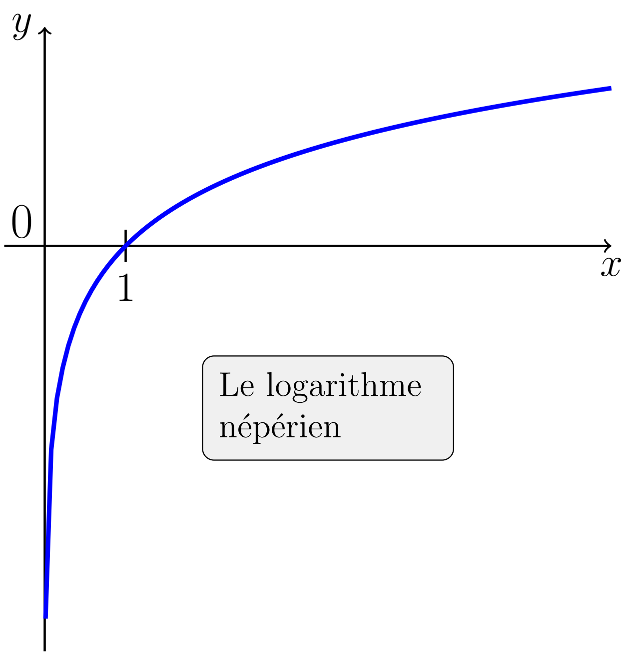
$\ln e = 1$

Formules :

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\ln(a^k) = k \ln a$

$\ln(a/b) = \ln a - \ln b$



5 L'exponentielle

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x$$

Histoire :

Les exponentielles sont des interpolations pour x non entier (ou rationnel) de $x \mapsto a^x$. Sous cette forme, elles existent depuis très longtemps. L'introduction du nombre e comme l'unique réel tel que $\ln(e) = 1$ et son étude datent de Leibniz et Euler, vers 1700. La compréhension de l'importance de l'exponentielle $x \mapsto e^x$ dans l'analyse demandera encore un siècle de maturation.

Dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x = e^x$$

Primitive :

$$\int^x e^s \, \mathrm{d}s = e^x + \mathrm{cte}$$

Développement limité :

$$e^x = 1 + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad \text{quand } x \longrightarrow 0$$

Valeurs particulières :

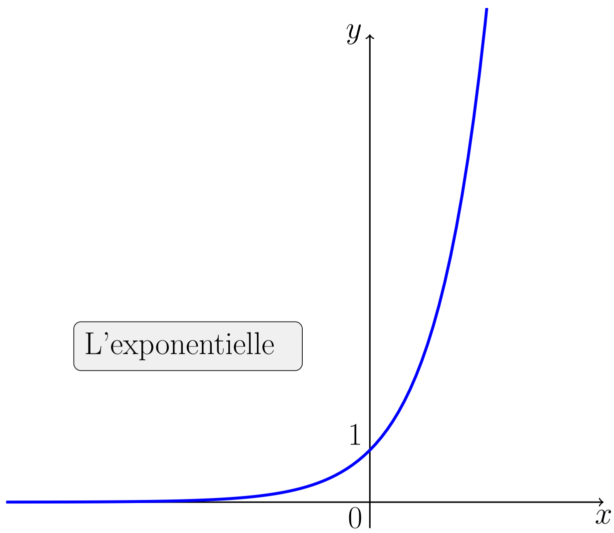
$e^0 = 1$

Formules :

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{ka} = (e^a)^k$

$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$



6 Les fonctions trigonométriques

$$\sin x \qquad \cos x \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Les fonctions sinus et cosinus sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La fonction tangente n'est pas définie en $x = \frac{\pi}{2}[\pi]$ et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ ailleurs. En mathématique, l'angle x est en radian et on fera attention que les dérivées et primitives connues sont valables dans ce cadre. Si x est mesuré en degré, on se ramènera à $\sin(\frac{\pi}{180}x)$ pour retrouver les calculs mathématiques usuels.

Histoire :

La trigonométrie est l'art de déduire toutes les mesures d'un triangle, angles et longueurs, quand on n'en connaît qu'une partie. Elle est très importante pour la géométrie et les relevés topographiques et astronomiques. De ce fait, elle est étudiée depuis l'Antiquité. Les fonctions trigonométriques telles qu'on les connaît aujourd'hui ont été introduites en Inde vers 500 après J.C., avant d'être reprises et étudiées par les scientifiques arabes et perses. Elles sont arrivées en Europe au Moyen Âge.

Dérivées :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Primitives :

$$\int^x \sin s \,\mathrm{d}s = -\cos x + \text{cte}$$
$$\int^x \cos s \,\mathrm{d}s = \sin x + \text{cte}$$
$$\int^x \tan s \,\mathrm{d}s = -\ln(|\cos x|) + \text{cte}$$

Développements limités :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) \quad \text{quand } x \longrightarrow 0$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) \quad \text{quand } x \longrightarrow 0$$
$$\tan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

Symétries :

Le cosinus et le sinus sont $2\pi-$périodiques et la tangente est $\pi-$périodique.

Le cosinus est pair alors que le sinus et la tangente sont impaires.

$$\cos(x+\pi) = -\cos x \qquad \sin(x+\pi) = -\sin x \qquad \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$$

Valeurs particulières :

$\cos(0) = 1$ $\sin(0) = 0$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

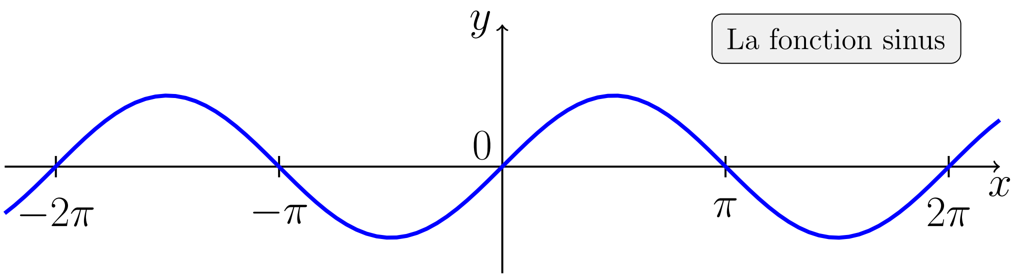
$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

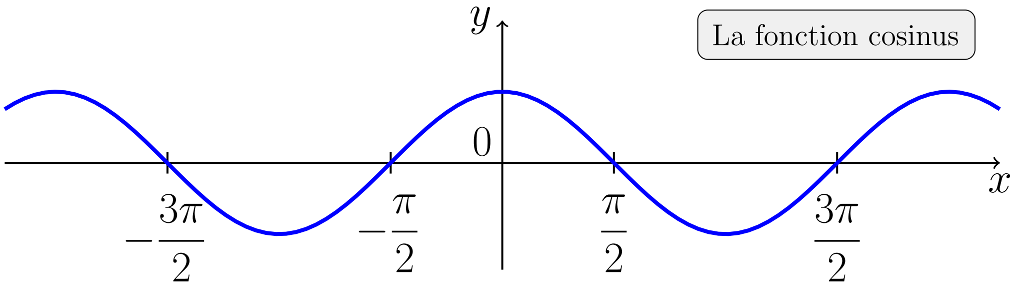
$\tan(0) = 0$ $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

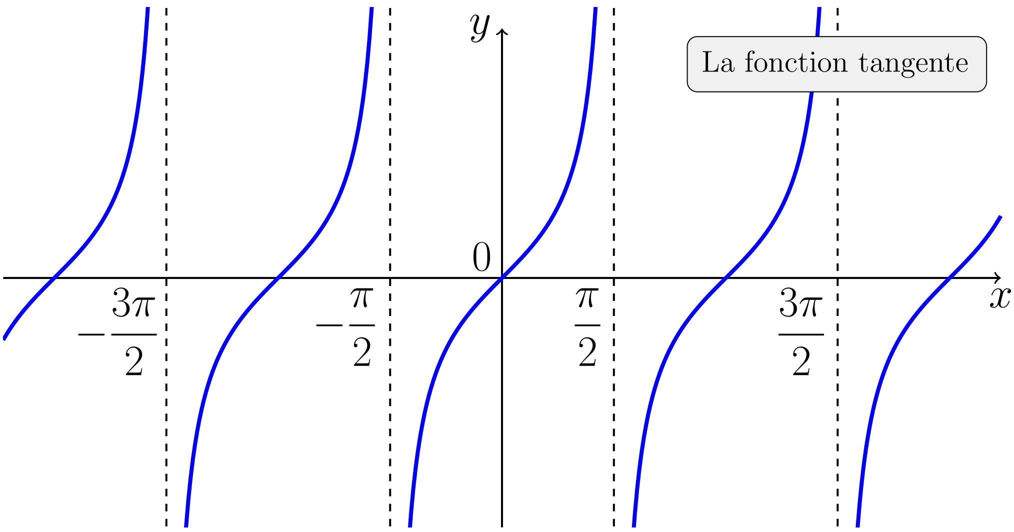
Formules :

$\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$ $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$





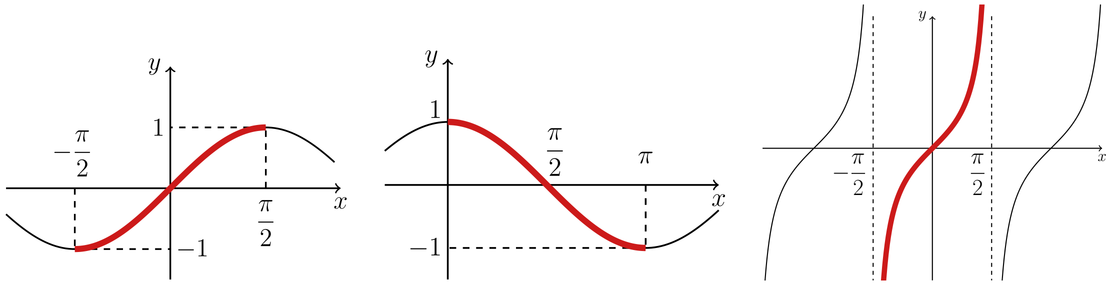


7 Les fonctions trigonométriques réciproques

$$\arcsin x \qquad \arccos x \qquad \arctan x$$

Il est naturel de vouloir introduire des réciproques aux fonctions trigonométriques, mais celles-ci ne sont pas des bijections. Il faut donc en choisir des branches particulières. Le plus naturel est de considérer un intervalle contenant 0 et, s'il faut choisir, l'intervalle du côté des nombres positifs. Ainsi :

- la fonction arcsin : $[-1{,}1] \longrightarrow [-\pi/2{,}\pi/2] \subset \mathbb{R}$ est définie comme la réciproque de la branche $x \in [-\pi/2{,}\pi/2] \mapsto \sin x \in [-1{,}1]$ du sinus.
- la fonction arccos : $[-1{,}1] \longrightarrow [0{,}\pi] \subset \mathbb{R}$ est définie comme la réciproque de la branche $x \in [0{,}\pi] \mapsto \cos x \in [-1{,}1]$ du cosinus.
- la fonction arctan : $\mathbb{R} \longrightarrow]-\pi/2{,}\pi/2[\subset \mathbb{R}$ est définie comme la réciproque de la branche $x \in]-\pi/2{,}\pi/2[\mapsto \tan x \in \mathbb{R}$ de la tangente.



! Il est important de saisir la conséquence de ce choix de branches : comme il est faux que $\sqrt{x^2} = x$ pour tout réel x, il est aussi faux que $\arcsin(\sin x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effet, $\arcsin(y)$ est l'angle <u>entre $-\pi/2$ et $\pi/2$</u> dont le sinus vaut y. Donc $\arcsin(\sin x) = x$ est vrai seulement si $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. Pour les autres cas, on utilisera les symétries du sinus. Par exemple, si $x = 7$, alors $\sin 7 = \sin(7 - 2\pi)$. Comme $(7 - 2\pi) \in [-\pi/2{,}\pi/2]$, on a

$$\arcsin(\sin 7) = \arcsin(\sin(7 - 2\pi)) = 7 - 2\pi\ .$$

Le nom complet de ces fonctions est naturellement *arcsinus*, *arccosinus* et *arctangente*. Pour comprendre d'où viennent ces noms, il faut visualiser le cercle trigonométrique : comme le cercle est de rayon 1, l'angle θ en radian est égal à la longueur de l'arc de cercle associé à cet angle. Donc $\arcsin\theta$ est « l'arc dont le sinus est θ ».

Histoire :

Jusqu'au 18ème siècle, les sinus, cosinus et tangente ne sont pas vues comme des fonctions mais comme des valeurs permettant les calculs de trigonométrie. Dès le 6ème siècle, des savants indiens, perses et arabes ont calculé des valeurs approchées des fonctions trigonométriques et ont publié des tables permettant aux autres savants de les utiliser pour leurs calculs géométriques. Ces tables disposent ainsi côte à côte les angles et les valeurs du sinus. Il était donc facile de retrouver à partir des valeurs du sinus l'angle associé en lisant la ligne dans l'autre sens. L'inversion des fonctions trigonométriques étaient très naturelle et n'a été formalisée comme une inversion de fonction qu'avec les débuts de l'analyse.

Les dérivées de ces fonctions réciproques se trouvent par la proposition 3.36. Pour l'arctangente, on utilise la forme $\tan' x = 1 + \tan^2 x$ et donc $\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}$. Puis on fait bien attention que $\tan(\arctan x) = x$ correspond au sens où l'inversion est toujours vraie : par définition, $\arctan x$ est un arc dont la tangente vaut x.

Pour arcsinus et arccosinus, il faut comprendre ce que vaut une expression comme $\cos(\arcsin x)$. Comme $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on a que $\cos(\arcsin x)^2 + x^2 = 1$. On utilise ensuite que $\arcsin x$ appartient à $[-\pi/2, \pi/2]$, zone où le cosinus est positif. Au final, on obtient que $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

Dérivées :

$$\forall\, x \in \,]-1,1[, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ , \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

Parmi les trois dérivées ci-dessus, c'est celle de l'arctangente qu'il faut vraiment retenir. En effet, elle apparaît quand on intègre des quotients de polynômes et est donc utile pour certaines intégrales qui n'avaient a priori rien à voir avec la trigonométrie. Par exemple,

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{4}\ .$$

Il est possible de trouver des formules pour des primitives des fonctions trigonométriques réciproques, mais elles ne sont pas souvent utiles donc nous n'allons pas les mettre ici.

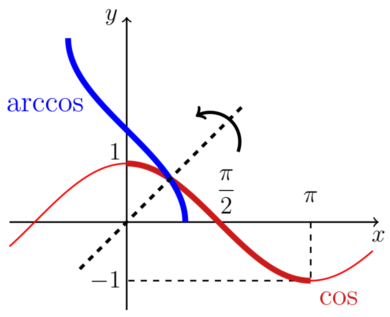
Les développements limités pour $x \mapsto 0$ ne sont pas non plus essentiels à apprendre par cœur. On peut juste se rappeler qu'ils se déduisent par intégration du développement de la dérivée. Par exemple, le développement de $1/(1+u)$ donne que

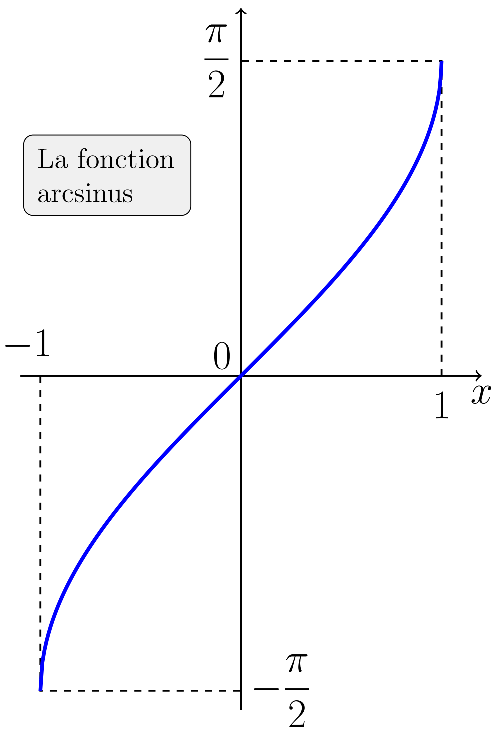
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2p} + o(x^{2p+1}) \quad \text{quand } x \longrightarrow 0$$

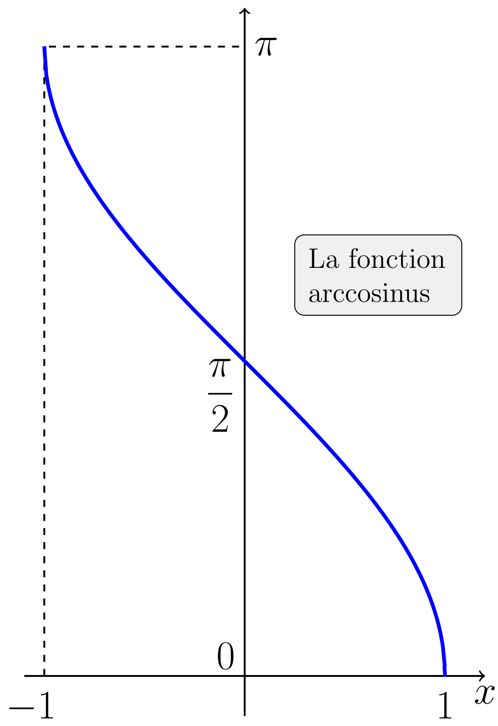
et donc

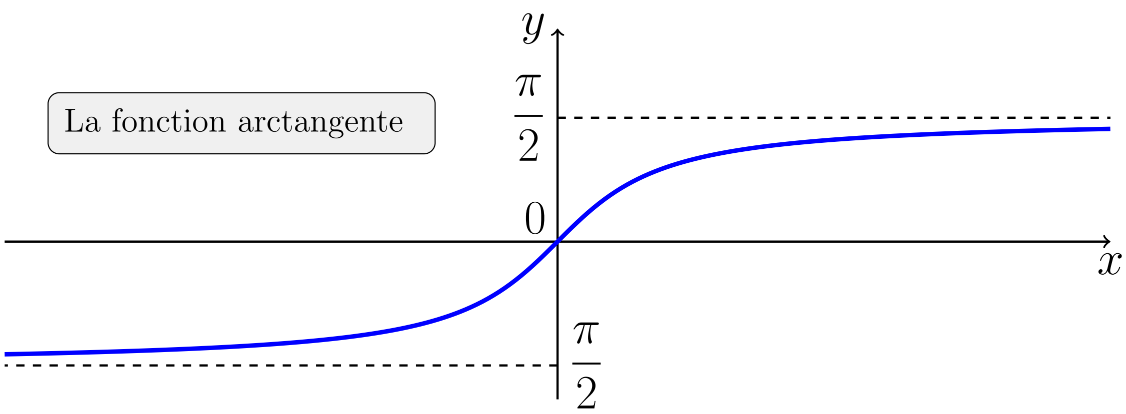
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+2}) \quad \text{quand } x \longrightarrow 0\ .$$

Pour obtenir les graphes ainsi que les valeurs particulières et les limites des fonctions, il suffit d'utiliser le procédé de la symétrie par rapport à la première bissectrice. À chaque fois, on refera bien attention à la branche de la fonction qui est concernée.









Les valeurs particulières, symétries et les formules se déduisent rapidement des valeurs particulières et des formules des fonctions trigonométriques.

Symétries :

Les fonctions arcsinus et arctangente sont impaires.
Les fonctions arcsinus et arccosinus sont reliées par $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

Exemples de valeurs particulières :

$\arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$ $\quad$ $\arcsin(0) = 0$ $\quad$ $\arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$

$\arccos(-1) = \pi$ $\quad$ $\arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad$ $\arccos(1) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$ $\quad$ $\arctan(0) = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$

Formules :

$\forall x \in [-1,1]\ , \quad \arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$

$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ $\quad$ et $\quad$ $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$