Chapitre 2 : Les suites numériques

Si on se permet de discrétiser le temps, la majorité des phénomènes physiques ou biologiques peuvent se modéliser à l'aide de suites. Le but de ce chapitre est de formaliser cette notion de suite, de savoir obtenir les limites de suites dans les cas les plus élémentaires et de faire quelques applications avec les modèles les plus simples.

1 Introduction

Une suite est une succession discrète et infinie de nombres. L'adjectif *discret* veut dire qu'il y a un premier nombre, puis un deuxième, un troisième etc. La définition formelle est la suivante.

Définition 2.1

Une **suite numérique** est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$

$$n \in \mathbb{N} \longmapsto u_n \in \mathbb{R} .$$

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$ cette suite et on dit que u_n est le **terme général** de la suite.

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la collection de nombres

$$u_0 \ , \ u_1 \ , \ u_2 \ , \ u_3 \ , \ u_4 \ , \ u_5 \ldots$$

Quand on parle de suite, on sous-entend plus que l'idée d'une collection statique : dans l'idée de suite, il y a souvent un sens du « temps qui passe ». En général, notre problème sera de comprendre ce qui se passe « dans le futur » quand n grandit voire tend vers l'infini. Notons qu'on n'est pas obligé de commencer à l'indice $n = 0$. Si on commence $n = 1$, on peut utiliser la notation $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou bien $(u_n)_{n\geq 1}$ (on sous-entend que n est forcément un entier). Mais on pourrait aussi commencer à l'indice $n = 2$ ou bien $n = -3$, voire même une suite indexée par tous les entiers relatifs $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, même si nous ne traiterons pas ce dernier cas dans ce cours. Pour ne pas alourdir les énoncés, on prendra le plus souvent $\mathbb{N}$ comme ensemble d'indices, mais les autres possibilités sont parfaitement admises. Quand l'indice de départ n'est pas très important (en général, on veut surtout savoir ce qu'il se passe quand n tend vers l'infini), considéré comme évident ou déjà mentionné, on peut juste noter la suite (u_n).

! Dans la notation, il est important de noter la présence des parenthèses qui distinguent (u_n) et u_n. La *suite* (u_n) est une collection de nombre dont on peut chercher la limite par exemple. Le *terme général* u_n est un nombre réel (éventuellement dépendant de n) que l'on peut manipuler comme n'importe quel nombre. Ainsi, il est aussi absurde de dire « u_n a une limite » que de dire « 2 a une limite ». Mais on peut dire « (u_n) a une limite ». A l'inverse, c'est absurde d'écrire $(u_n)^2$ car on ne sait pas mettre une suite au carré, mais on peut écrire u_n^2 qui est un nombre au carré ou bien (u_n^2) qui est la suite des carrés des nombres u_n.
Cela peut paraître du pinaillage, mais c'est important pour structurer la pensée et détecter facilement des erreurs dans des raisonnements (de la même façon que l'homogénéité des unités permet de repérer facilement des erreurs dans les formules physiques).

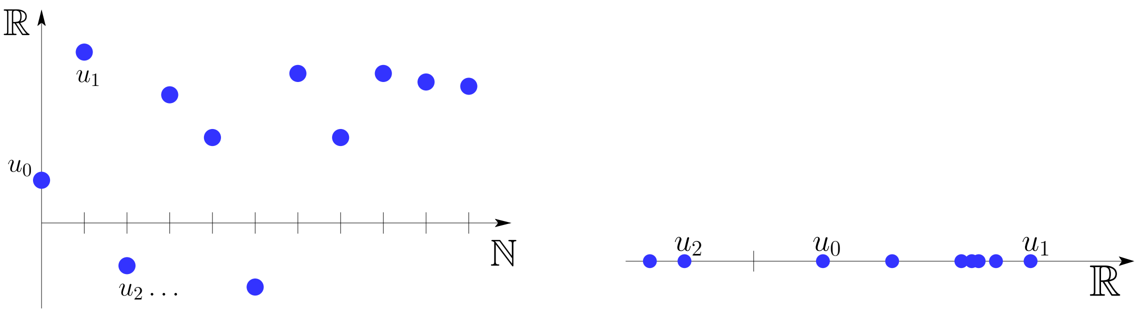


FIGURE 2.1 – *Une même suite représentée de deux façons. À gauche, on a représenté le graphe de la fonction de ℕ dans ℝ. On note que les variations de la suite et « l'écoulement du temps » sont clairement visibles. À droite, on a représenté les valeurs de la suite sur la droite réelle. On voit plus facilement les zones où la suite s'accumule. Par contre, il est difficile de voir l'ordre des points sans les numéroter tous.*

Exemples :

- Dans une expérience, on relève la température toutes les minutes. On obtient une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où T_n est la température à la minute n. Il peut être impossible de décrire T_n par une formule mais (T_n) est quand même une suite de nombres.

- Le terme général u_n est donné par une formule $u_n = f(n)$, par exemple $u_n = 1/(1+n^2)$. On obtient la suite $\left(\frac{1}{1+n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et on peut par exemple montrer qu'elle décroît et tend vers 0 (notons bien que la suite (u_n) décroît mais le nombre u_n lui est juste un nombre tout seul, ce serait absurde de dire qu'il décroît). Dans la vraie vie, il faut déjà avoir fait de la modélisation pour obtenir une formule mathématique à partir d'un problème concret.

- La suite est définie par récurrence : on connaît $u_0 \in \mathbb{R}$ et on a une formule $u_{n+1} = f(u_n)$ qui permet de calculer de proche en proche les termes suivants. Là encore, en dehors des exercices académiques, cela provient de modélisation, de lois physiques etc. Nous allons voir plusieurs exemples concrets dans la suite de cette partie.

- La suite de Syracuse est une suite qui intrigue toujours les mathématiciens. Elle est définit par récurrence comme suit. On part de $u_0 \in \mathbb{N}^*$ un entier choisi. Puis on passe du rang n au rang $n+1$ ainsi : si u_n est pair, on le divise par 2 en posant $u_{n+1} = u_n/2$, si u_n est impair, on pose $u_{n+1} = 3u_n + 1$. Par exemple, si on prend $u_0 = 10$, on obtient la suite

$$10,\ 5,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1,\ 4,\ 2,\ 1\ldots$$

  On voit qu'elle finit par tourner dans la boucle $4 \to 2 \to 1 \to 4$. En fait, à chaque fois qu'on teste cette suite pour une valeur $u_0 \in \mathbb{N}^*$, on retombe dans cette boucle. On sait que c'est le cas pour plusieurs milliards de milliards de nombres de départ, mais personne n'a encore réussi à démontrer que c'est toujours vrai. Il est même possible que cela soit *indécidable*, c'est-à-dire que cette propriété serait impossible à démontrer, mais cela reste une conjecture ouverte.

- La suite de Conway (appelée aussi « look and say ») est la suite 1, 11, 21, 1211, 111221, 312211... Bien qu'il s'agisse juste d'une suite jouet, elle peut conduire à des résultats assez complexes. Ainsi John Horton Conway (1937-2020, Angleterre) a démontré qu'elle tend vers l'infini comme une exponentielle λ^n avec $\lambda \simeq 1{,}3$ un nombre parfaitement décrit mathématiquement.

- Dans une population de N individus, un virus se propage. Une personne met une semaine à guérir mais peut transmettre pendant cette semaine-là ce virus à une personne qui n'a jamais été malade. On note u_n le nombre de personnes malades pendant la semaine n. Le nombre total de personnes qui ont été malades et sont immunisées est donc $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. La probabilité que deux personnes se croisent, une étant malade et l'autre non immunisée est proportionnelle au pourcentage de ces populations dans la population totale. On obtient alors une récurrence

$$u_{n+1} = \alpha u_n\big(N - (u_0 + u_1 + \ldots + u_n)\big)$$

  où $\alpha > 0$ quantifie la facilité avec laquelle le virus se transmet.

Il existe deux classes de suites qui regroupent des cas simples mais qui sont des exemples importants.

Définition 2.2

Une suite **arithmétique** est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par une donnée initiale $u_0 \in \mathbb{R}$ et une **raison** $a \in \mathbb{R}$ grâce à la récurrence $u_{n+1} = u_n + a$.

Proposition 2.3

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de donnée initiale $u_0 \in \mathbb{R}$ et de **raison** $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\quad u_n = u_0 + na\ .$$

Démonstration : La formule se démontre par une récurrence très simple. Par définition, on a bien $u_0 = u_0 + 0.a$. Supposons que la formule soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors $u_{n+1} = u_n + a = (u_0 + na) + a = u_0 + (n+1)a$ et donc la formule est aussi vraie au rang $n+1$. □

Exemple :

Une personne a 1.000 € en épargne et économise 60 € chaque mois. La suite (u_n) de son argent épargné au mois n en euros est une suite arithmétique de raison 60 et de donnée initiale 1.000. Au mois n, elle aura donc épargné $u_n = 1.000 + 60n$ €.

Définition 2.4

Une suite **géométrique** est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par une donnée initiale $u_0 \in \mathbb{R}$ et une **raison** $a \in \mathbb{R}$ grâce à la récurrence $u_{n+1} = a.u_n$.

Proposition 2.5

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de donnée initiale $u_0 \in \mathbb{R}$ et de **raison** $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\quad u_n = a^n u_0\ .$$

Démonstration : La formule se démontre encore par une récurrence simple laissée en exercice pour le lecteur. □

Exemples :

- Un épargnant a mis 1.000 € sur un compte rémunéré à 2 % par an. Chaque année, son épargne est donc multipliée par un facteur 1,02 : c'est une suite géométrique de raison 1,02. Au bout de 10 ans, elle est multipliée par un facteur $1{,}02^{10} \simeq 1{,}219$ soit un gain de 21,9 %.

- Le carbone 14 est un isotope instable du carbone. Naturellement, dans un bloc de carbone, une petite fraction de x % de carbone 14 se désintègre chaque année. La masse de carbone 14 présent suit donc une suite géométrique de raison $a = (1 - x/100)$. On sait que la demi-vie du carbone 14 est d'environ 5.730 années, ce qui veut dire que la moitié du carbone 14 s'est désintégrée pendant cette période. On a donc $a^{5730} = 1/2$ soit $\ln a = -(\ln 2)/5730$. On trouve que $x \simeq 0{,}012$ % c'est-à-dire qu'environ 1/12.000-ième du carbone 14 disparaît chaque année.

- Le premier modèle de dynamique des populations est dû à Thomas Robert Malthus (1766-1834, Angleterre). Si une génération de u_n individus a un taux de fécondité de a enfants par individu (donc $2a$ enfants par couple ou par femme), alors la génération suivante est de taille $u_{n+1} = au_n$. Donc la population totale croît de façon exponentielle $u_n = a^n u_0$. Pour l'histoire connue, la population mondiale suit pour le moment cette courbe exponentielle avec un taux d'accroissement de 1,2 % par an environ. Donc sur les dernières générations, pour disons 30 ans chaque génération, alors l'accroissement est environ de $1{,}012^{30} \simeq 1{,}4$, soit 2,8 enfants par femme en moyenne.

- Soit N_n le nombre de transistors dans un microprocesseurs d'un ordinateur à l'année n. La loi empirique de Moore énoncée en 1975 dit que ce nombre double tous les deux ans, donc que N_n est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$. Cela reste étonnamment vérifié près de 50 ans plus tard.

- Si on reprend le modèle du virus ci-dessus et que l'on suppose qu'au début, quasiment personne n'est immunisé. Alors le nombre de malades suit la règle $u_{n+1} = \alpha N u_n$ qui est une suite géométrique conduisant à une croissance exponentielle du nombre de malades. Si une part β de la population a été immunisée, alors le taux tombe à $\alpha\beta N$. Pour éviter l'épidémie, il faut arriver à faire baisser ce taux sous 1, par exemple en vaccinant un certain pourcentage de la population.

Pour la culture, nous allons finir cette introduction avec un exemple historique classique, celui de **la suite de Fibonacci**. Léonard Fibonacci a une grande importance puisqu'il a grandement participé à l'importation du savoir arabe oriental en Europe, en particulier l'introduction de l'écriture décimale qui va aider au développement du commerce et de la finance.
Mais son nom est surtout connu à cause de la suite qu'il a introduite en étant un des premiers à étudier la dynamique d'une population. Il imagine une population de lapins qu'on va compter par couples. Chaque mois, un couple de lapins donne naissance à deux petits (c'est-à-dire un autre couple numériquement parlant). Les petits mettent deux mois pour devenir adultes et donc féconds. Si on part d'un couple originel ($u_0 = 1$), il ne donnera pas de naissance le premier mois ($u_1 = 1$) puis naissance à un couple le second mois ($u_2 = 2$), puis a nouveau naissance à un couple au troisième mois alors que le jeune couple précédent n'est pas encore mature ($u_3 = 3$) etc. De manière générale, au mois n, il y aura les couples déjà présents au mois $n-1$ et toutes les naissances, qui sont autant que de couples âgés d'au moins 2 mois, i.e. présents au mois $n-2$. Cela donne la relation de récurrence

Leonardo Fibonacci
(dit aussi Léonard de Pise)
1175-1250
Italie

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

Avec les données initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, on obtient la célèbre suite de Fibonacci

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55\ldots$$

On peut retrouver cette suite dans divers problèmes et même dans les végétaux en comptant les spirales dans les pommes de pins ou les tournesols. Il existe un algorithme permettant d'obtenir une formule pour ces suites récurrentes et on peut prouver que

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^{n+1} - (-\phi)^{-n-1}\right) \quad \text{où} \quad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

est le nombre d'or (voir la partie ci-dessous sur les suites récurrentes). En particulier, le rapport u_{n+1}/u_n tend vers le nombre d'or ϕ, ce qui a amené un caractère mystique à cette suite.

2 Limites de suites

Nous avons déjà parler de limites de suites et cela ne pose pas trop de problèmes intuitifs pour le moment. Mais si on regarde des cas plus complexes et qu'on veut obtenir des théorèmes rigoureux, il nous faut en donner une définition précise.

Définition 2.6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$ un réel. On dit que (u_n) a pour **limite** ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ ,\ \ \forall n \geq n_0,\ \ |u_n - \ell| < \varepsilon\ .$$

On notera

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \qquad \text{ou} \qquad u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell\ .$$

On dit aussi que (u_n) **converge** ou **tend vers** ℓ.
On dit (u_n) est **convergente**, ou bien converge, s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que (u_n) tend vers ℓ. Dans le cas contraire, on dit que (u_n) est **divergente**.

Les mathématiciens étant humains, ils ne sont pas toujours cohérents. Ainsi, s'il est clair que c'est la suite (u_n) qui est convergente ou qui admet une limite, la notation est $\lim u_n = \ell$ ou $u_n \to \ell$ (sans les parenthèses). De même, on utilise très souvent l'abus de notation de dire que c'est le terme général u_n qui tend vers ℓ.

Décryptons la notation en quantificateurs. On a vu que l'ensemble des x tels que $|x - \ell| \leq \varepsilon$ correspond à l'ensemble des points plus proche de ℓ que la distance $\varepsilon > 0$ fixée. La partie $\forall \varepsilon > 0$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$ signifie donc que u_n peut être pris plus proche de ℓ que n'importe quelle petite marge d'erreur $\varepsilon > 0$ qu'on s'est fixé à l'avance. On a aussi vu qu'un ensemble d'entiers n vérifiant $n \geq n_0$ est du type voisinage de l'infini. La partie $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$ correspond à prendre n assez grand, en quelque sorte assez proche de l'infini. Au total, on peut donc lire « quitte à prendre n assez grand, u_n est aussi proche de ℓ que voulu ». Avant la notation rigoureuse des quantificateurs, un mathématicien comme Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716, Allemagne) tentait d'écrire la notion de limite avec des phrases comme

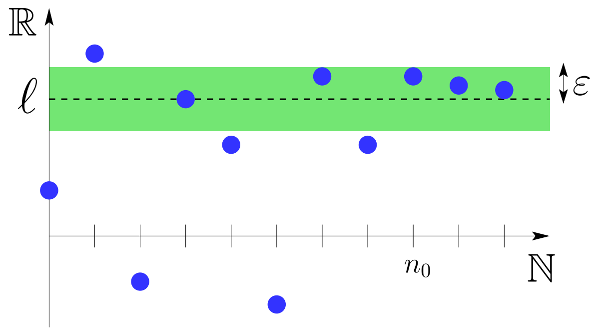


FIGURE 2.2 – *Une illustration de la définition de la limite. Les points de la suite ne sont pas tous dans l'intervalle* $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$ *mais il existe un rang* n_0 *à partir duquel c'est le cas. Plus* $\varepsilon>0$ *sera petit, plus il faudra aller chercher loin ce rang* n_0*.*

« *à mesure qu'on la considère de plus en plus loin, l'erreur sera moindre que toute grandeur donnée.* »

On peut aussi définir les limites infinies. Pour cela, on se rappelle qu'être de plus en plus proche de $+\infty$, c'est devenir plus grand que n'importe quel nombre fixé à l'avance (un voisinage de $+\infty$ étant de la forme $]M,+\infty[$ avec $M\in\mathbb{R}$).

Définition 2.7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que (u_n) a pour **limite** $+\infty$ si

$$\forall M\in\mathbb{R}\ ,\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ ,\ \forall n\geq n_0,\ \ u_n\geq M\ .$$

On notera

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty \qquad \text{ou} \qquad u_n\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}+\infty\ .$$

Symétriquement, on dit que (u_n) a pour **limite** $-\infty$ si

$$\forall M\in\mathbb{R}\ ,\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ ,\ \forall n\geq n_0,\ \ u_n\leq M$$

avec les notations symétriques évidentes.

Attention, si on peut parler de limite infinie, on considère bien qu'une suite qui tend vers $\pm\infty$ est divergente, comme le dit la définition 2.6.

On parle de *la* limite d'une suite à cause de la proposition suivante.

Proposition 2.8

Si (u_n) est une suite convergente, alors sa limite ℓ est unique. De même, une suite qui tend vers $\pm\infty$ ne peut avoir d'autre limite que $\pm\infty$.

Démonstration : Supposons que la suite (u_n) ait deux limites ℓ et ℓ' réelles différentes (on laisse les cas des limites infinies au lecteur). Comme $|\ell-\ell'|$ n'est pas nul, $|\ell-\ell'|>0$. On applique la définition de la limite pour $\varepsilon=|\ell-\ell'|/3$:

il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$ et il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $|u_n - \ell'| < \varepsilon$. Si on prend $n = \max(n_1,n_2)$, l'inégalité triangulaire implique que

$$|\ell - \ell'| = |\ell - u_n + u_n - \ell'| \leq |\ell - u_n| + |u_n - \ell'| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|\ell - \ell'|$$

ce qui est absurde car $|\ell - \ell'| > 0$. □

On peut faire quelques cas simples à la main.

Exemples :

- Supposons que (u_n) est une suite constante égale à α. Soit $\varepsilon > 0$, on prend $n_0 = 0$ et on a pour tout $n \geq n_0 = 0$ que $|u_n - \alpha| = |\alpha - \alpha| = 0 < \varepsilon$. Donc (u_n) tend vers α.

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $a > 0$. On sait d'après la proposition 2.3 que $u_n = u_0 + na$. Soit $M \in \mathbb{R}$, on pose $M' = M - u_0$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien (ce qui découle de la construction des réels et est donc une propriété presque axiomatique, cf chapitre précédent), on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ assez grand tel que $n_0 a > M' = M - u_0$. Pour $n \geq n_0$, on a donc $u_n = u_0 + na \geq u_0 + n_0 a > M$. Ceci montre que (u_n) tend vers $+\infty$. Symétriquement si la raison a est strictement négative, on aura que (u_n) tend vers $-\infty$.

- On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = (-1)^n/n$. Soit $\varepsilon > 0$ et prenons un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > 1/\varepsilon$. Pour tout $n \geq n_0$, on a alors $|u_n| = 1/n \leq 1/n_0 < \varepsilon$. Ceci montre que (u_n) tend vers 0.

Avant de regarder d'autres cas concrets, faisons encore un peu de théorie.

Définition 2.9

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **majorée** si l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ est majoré, c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **minorée** si l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ est minoré, c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.10

Une suite convergente est bornée.

Démonstration : Supposons que la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. On applique la définition de la convergence avec $\varepsilon = 1$: il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| < 1$. L'inégalité triangulaire (2ème version) montre que

$|u_n| - |\ell| \leq 1$ et donc que $|u_n| \leq |\ell| + 1$ pour tout $n \geq n_0$. Il n'y a qu'un nombre fini d'indices $n < n_0$. On peut donc les borner par leur maximum. On pose $M = \max(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n_0-1}|, |\ell| + 1)$. On a que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc (u_n) est bornée. $\square$

! Une suite bornée n'est pas forcément convergente. Le contre-exemple typique est la suite de terme général $u_n = (-1)^n$.

Derrière le théorème 12 ci-dessous se cache une propriété importante des nombres réels. Il s'agit d'une propriété fondamentale, quasiment axiomatique, du même niveau que l'existence de la borne supérieure.

Définition 2.11

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **croissante** (resp. strictement croissante) si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (resp. $u_{n+1} > u_n$).

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **décroissante** (resp. strictement décroissante) si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (resp. $u_{n+1} < u_n$).

Théorème 2.12

Toute suite croissante majorée converge (vers une limite réelle finie). Symétriquement, toute suite décroissante minorée converge (vers une limite réelle finie).

Démonstration : Si (u_n) est croissante et majorée, alors l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble majorée non vide de $\mathbb{R}$. Il admet donc une borne supérieure $\ell \in \mathbb{R}$, cf chapitre précédent. Par construction, comme ℓ est un majorant, $u_n \leq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme ℓ est le plus petit majorant, pour tout $\varepsilon > 0$, $\ell - \varepsilon$ n'est plus un majorant et il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > \ell - \varepsilon$. Comme la suite est croissante, on a que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0} > \ell - \varepsilon$. On a donc que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell]$ et donc que $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
On vient de montrer qu'une suite croissante majorée converge. Le cas symétrique se démontre de la même façon. $\square$

Corollaire 2.13

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, alors on a l'alternative suivante :

i) soit (u_n) est majorée et converge vers une limite finie,
ii) soit (u_n) n'est pas majorée et diverge vers $+\infty$.

Symétriquement, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, alors on a l'alternative suivante :

i) soit (u_n) est minorée et converge vers une limite finie,
ii) soit (u_n) n'est pas minorée et diverge vers $-\infty$.

Démonstration : On va se limiter au cas où (u_n) est croissante (l'autre cas se démontre avec les arguments symétriques). Si (u_n) est majorée, alors le théorème 2.12 conclut. Supposons donc que (u_n) n'est pas majorée : pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe forcément $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > M$ puisque M ne peut pas être un majorant. Mais comme la suite est croissante, on a alors pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0} > M$. Par définition, cela veut dire que (u_n) tend vers $+\infty$. $\square$

On peut déjà retrouver des limites grâce à ces résultats. Sans doute que ces limites semblent bien connues, mais il faut être capable d'en donner des démonstrations pour voir si la théorie est cohérente.

Exemples :

- Le logarithme a été introduit par John Napier en 1614. Son intérêt est de transformer les multiplications complexes en des sommes beaucoup plus simples à faire à la main. La fonction ln est donc définie afin que $\ln(ab) = \ln(a)+\ln(b)$ et normalisée par $\ln(1+x) \simeq x$ pour x petit. On en déduit que ln est croissante et donc que la suite (u_n) définie par $u_n = \ln n$ est croissante. Par ailleurs, par construction $\ln(2^n) = n \ln 2$ est une suite arithmétique qui tend vers $+\infty$ et donc la suite ne peut pas être majorée. Le résultat précédent nous montre donc que $(\ln n)$ tend vers $+\infty$.

- On considère une suite géométrique croissante, disons $u_n = 2^n$. Soit elle converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ qui est forcément positive car $u_n \geq 1$, soit elle converge vers $+\infty$. Si jamais elle converge vers $\ell > 0$, alors on aurait, en prenant $\varepsilon = \ell/3$, l'existence d'un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, u_n est dans l'intervalle $]2\ell/3, 4\ell/3[$. Mais alors $u_{n_0+1} = 2u_{n_0}$ serait dans l'intervalle $]4\ell/3, 8\ell/3[$ ce qui est contradictoire. Donc on a bien que (u_n) tend vers $+\infty$.

- On considère une suite géométrique $u_n = \alpha^n$ avec $|\alpha| < 1$. On a que $|u_{n+1}| = |\alpha||u_n| < |u_n|$ et donc la suite $(|u_n|)$ est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. En passant à la limite $|u_{n+1}| = |\alpha||u_n|$, on obtient $\ell = |\alpha|\ell$ et donc $\ell(1-|\alpha|) = 0$. Comme $|\alpha| < 1$, cela implique que $\ell = 0$. On vient de montrer que $|\alpha^n| \to 0$ mais d'après la proposition 2.14 ci-dessous, c'est équivalent à dire que $\alpha^n \to 0$.

Nous venons d'utiliser une remarque pratique qui est simple mais pourra souvent servir. C'est pourquoi nous pouvons la mettre sous forme de proposition.

Proposition 2.14

Une suite (u_n) tend vers 0 si et seulement si $(|u_n|)$ tend vers 0.

Démonstration : Dans la définition de la convergence, si $\ell = 0$, la condition $|u_n - \ell| < \varepsilon$ devient $|u_n| < \varepsilon$. La proposition découle simplement du fait que $\big||u_n|\big| = |u_n|$. □

3 Calcul de la limite d'une suite

Le principe général pour s'attaquer à l'étude de la convergence d'une suite est la suivant. On connaît par cœur quelques limites de suites standards. Pour les autres limites, on se ramène à ces cas standards à l'aide des règles sur les opérations (sommes, produits...). Cela va être résumé dans les tableaux ci-dessous.

Multiplication par un réel λ

Si $\lambda > 0$

Limite de (u_n)	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
Limite de (λu_n)	$\lambda\ell$	$+\infty$	$-\infty$

Si $\lambda < 0$

Limite de (u_n)	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
Limite de (λu_n)	$\lambda\ell$	$-\infty$	$+\infty$

Dans le prochain tableau et les suivants, « F.I. » signifie « forme indéterminée ». Cela veut dire qu'il n'existe aucune règle générale pour traiter ce cas là.

Somme de suites (u_n) et (v_n)

Limite de (u_n)	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$\ell \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de (v_n)	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Limite de $(u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.

Comme on le voit, ces tableaux sont très logiques. Il n'est pas nécessaire de les apprendre par cœur car il suffit de comprendre leur logique. Ainsi si (v_n) tend vers l'infini, il devient de plus en plus grand. Si on lui ajoute (u_n) bornée ou bien qui elle-même est de plus en plus grand, alors la somme va devenir aussi très grande. C'est l'intuition des cas 2 et 3 du tableau ci-dessus.

Pour comprendre la forme indéterminée « $\infty - \infty$ », il faut voir que si on soustrait quelque chose de très grand à quelque chose de très grand, le reste obtenu peut être n'importe quoi suivant la compensation qui s'est produite. Voici quelques exemples

Une suite (u_n) qui tend vers $+\infty$	$n+a$	$2n$	n	$n+(-1)^n$
Une suite (v_n) qui tend vers $-\infty$	$-n$	$-n$	$-2n$	$-n$
La somme $w_n = u_n + v_n$ des deux suites	a	n	$-n$	$(-1)^n$
La limite de la somme	$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	pas de limite

On voit qu'une des questions est de savoir laquelle des suites tend « plus vite » vers l'infini que l'autre. Pour cela, connaître juste la limite n'est pas suffisant : il faut estimer la vitesse de convergence de ces suites. Cela permet de « lever l'indétermination ». Les techniques classiques pour ce faire utilisent les équivalents et les développements limités, que nous verrons à la fin de ce cours.

Les règles de multiplication de limites sont ainsi.

Produit de suites (u_n) et (v_n)

Limite de (u_n)	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	0
Limite de (v_n)	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de $(u_n.v_n)$	$\ell.\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Encore une fois, il n'y a pas de pièges dans ces règles. Les cas où la limite est négative peuvent même se déduire des cas positifs en factorisant des termes ± 1. Ainsi, si (u_n) tend vers $\ell < 0$ et (v_n) tend vers $+\infty$, on pose $u'_n = -u_n$. Comme il ne s'agit que d'une multiplication par un scalaire, on a que (u'_n) tend vers $-\ell > 0$. On a alors que $(u'_n v_n)$ tend vers $+\infty$ d'après le tableau précédent. Comme $u_n v_n = -u'_n v_n$, on trouve que $(u_n v_n)$ tend vers $-\infty$ par le tableau de multiplication par un scalaire.

La forme indéterminée est aussi logique puisqu'en regardant des cas $u_n = 1/n^k$ et $v_n = n^{k'}$, on voit que la limite de $u_n v_n = n^{k'-k}$ va dépendre de si $k' > k$ ou l'inverse. Donc si on n'a pas de précision de la vitesse de convergence des suites vers 0 et $+\infty$ pour les comparer, on ne peut lever l'indétermination.

On finit avec l'inverse d'une suite. A ce moment, il peut être agréable d'introduire la notion de limite à gauche ou à droite.

Définition 2.15

On dit qu'une suite (u_n) converge **à droite** vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ si (u_n) converge vers ℓ et que $u_n \geq \ell$ à partir d'un certain rang. On note $u_n \to \ell^+$.
On dit qu'une suite (u_n) converge **à gauche** vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ si (u_n) converge vers ℓ et que $u_n \leq \ell$ à partir d'un certain rang. On note $u_n \to \ell^-$.

On obtient le tableau suivant dans lequel on a sous-entendu que $u_n \neq 0$ pour pouvoir parler de son inverse.

Inverse d'une suite (u_n)

Limite de (u_n)	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	0^+	0^-
Limite de $(1/u_n)$	$1/\ell$	0	F.I.	$+\infty$	$-\infty$

Pour obtenir la limite d'un quotient (u_n/v_n), on pourra écrire le quotient comme le produit avec l'inverse $u_n/v_n = u_n \times 1/v_n$ et se reporter aux deux tableaux.

Les cas basiques à connaître

Puissances :
Si $\alpha > 0$ alors $n^\alpha \longrightarrow +\infty$.
Si $\alpha < 0$ alors $n^\alpha \longrightarrow 0$.

Polynômes :
La limite d'une suite définie par un polynôme $a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \dots$ est celle du terme de plus haut degré $a_d n^d$

Suites géométriques :
Soit (u_n) un suite géométrique de raison $a \in \mathbb{R}$.
Si $a = 1$, alors (u_n) est constante égale à u_0 et tend vers u_0.
Si $|a| < 1$ alors (u_n) converge vers 0.
Si $a > 1$ alors (u_n) diverge vers $+\infty$.
Si $a < 1$ alors (u_n) diverge sans avoir de limite même infinie.

Fonctions :
On a $\lim \ln(n) = +\infty$ et $\lim e^n = +\infty$.
De manière générale si f est une fonction dont on connaît la limite en $+\infty$, alors $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers cette limite.

On notera ici un abus dans le plan de ce cours puisque la question des limites de fonctions ne sera abordée qu'au chapitre prochain mais nous supposons que le lecteur en a quelques notions quand même.

Cette partie est pour le moment de la révision du programme de lycée. La nouveauté est que nous pouvons maintenant en faire des démonstrations. Comprendre le mécanisme de ces preuves est important pour comprendre comment nous pourrons généraliser ces notions de limites à des cas plus complexes, comme les limites de vecteurs de $\mathbb{R}^d$ ou les limites de fonctions.

Nous allons finir cette partie par quelques démonstrations choisies pour donner des exemples. Faire les démonstrations des autres cas est un bon exercice.

Démonstration pour la somme de limites finies : Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ' dans $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence, il existe un rang n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, on a $|u_n - \ell| < \varepsilon/2$. De même, il existe un rang n_2 tel que pour tout $n \geq n_2$, on a $|v_n - \ell'| < \varepsilon/2$. On pose $n_0 = \max(n_1,n_2)$. Pour tout $n \geq n_0$, les deux estimations précédentes sont vérifiées et donc

$$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| = |(u_n - \ell) + (v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

par l'inégalité triangulaire. On vient de démontrer la proposition

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \ \ \forall n \geq n_0 \ , \ \ |(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| < \varepsilon$$

qui veut dire par définition que $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$. $\square$

Démonstration pour la somme d'une limite finie et une infinie : Soit (u_n) une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et soit (v_n) une suite qui diverge vers $+\infty$. Comme (u_n) converge, elle est bornée et il existe un minorant $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Par définition de la convergence vers $+\infty$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $v_n \geq (M-m)$. On a alors que $u_n + v_n \geq m + (M-m) = M$. On a donc montré que

$$\forall M \in \mathbb{R} \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \ \forall n \geq n_0 \ , \ u_n + v_n \geq M$$

ce qui signifie que $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$. □

Démonstration pour le produit de limites finies : Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ' dans $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. On commence par constater que comme (v_n) converge, elle est bornée. Il existe donc $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|v_n| \leq M$. Quitte à prendre M plus grand, on peut aussi supposer que $M \geq |\ell|$. On applique maintenant la convergence des deux suites pour une erreur $\varepsilon/(2M)$ et on peut trouver n_1 et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que pour $n \geq n_1$, $|u_n - \ell| < \varepsilon/(2M)$ et pour $n \geq n_2$, $|v_n - \ell'| < \varepsilon/(2M)$. On pose $n_0 = \max(n_1,n_2)$. Pour tout $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |u_n v_n - \ell\ell'| &= |(u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell|.|v_n| + |\ell|.|v_n - \ell'| \\ &< \frac{\varepsilon}{2M} M + \frac{\varepsilon}{2M}|\ell| \leq \varepsilon \ . \end{aligned}$$

On vient de montrer que $(u_n v u_n)$ tend vers $\ell\ell'$. □

Démonstration pour l'inverse d'une suite tendant vers l'infini : Soit (u_n) une suite qui tend vers l'infini dans le sens où $|u_n| \to +\infty$ (ce qui est en particulier vrai si (u_n) tend vers $+\infty$, ou bien $-\infty$). Soit $\varepsilon > 0$. En appliquant la définition de la convergence vers $+\infty$ avec $M = 1/\varepsilon$, on obtient qu'il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \geq 2/\varepsilon$ et donc $1/|u_n| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. Comme $1/|u_n| = |1/u_n| = |1/u_n - 0|$, cela montre que $(1/u_n)$ tend vers 0. □

Démonstration pour les limites des puissances entières et polynômes : On peut traiter le cas des puissances entières en les exprimant comme produits de suites du type $u_n = n$ ou $u_n = 1/n$ dont on a déjà étudié la convergence. Soit maintenant une suite polynômiale $u_n = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \ldots + a_0$. À part le terme constant, les monômes tendent vers $\pm\infty$ et on pourrait avoir des formes indéterminées pour la somme si elle comprend des signes opposés. On utilise donc le principe général important qui est de factoriser par le terme dominant, c'est-à-dire celui qui tend le plus vite vers l'infini qui est ici $a_d n^d$ (avec bien sûr $a_d \neq 0$). On a alors

$$u_n = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \ldots + a_0 = a_d n^d \left(1 + \frac{a_{d-1}}{a_d} \frac{1}{n} + \frac{a_{d-2}}{a_d} \frac{1}{n^2} \ldots + \frac{a_0}{a_d} \frac{1}{n^d} \right) \ .$$

Dans la parenthèse, on a une somme de suites : une constante égale à 1 et les autres des puissances négatives qui tendent vers 0. Donc la somme tend vers 1. On en fait le produit avec $a_d n^d$ et par la proposition sur la limite des produits, la suite u_n tend vers $\pm\infty$, le signe étant le même que celui du coefficient a_d. □

4 Encadrements et limites

Dans la partie précédente, nous avons vu des méthodes permettant d'obtenir la limite d'une suite directement. Dans cette partie, nous allons voir des résultats un peu plus indirects qui utilisent des comparaisons.

La comparaison entre deux suites convergentes passe à la limite, du moment que l'on passe d'une inégalité stricte à une inégalité large.

Proposition 2.16

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. S'il existe un rang n_0 tel que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq n_0$, alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Démonstration : On pose $\ell = \lim u_n$ et $\ell' = \lim v_n$. Supposons que l'on ait $\ell' < \ell$. On pose $\varepsilon = (\ell - \ell')/2 > 0$. Pour n assez grand, on doit avoir que $u_n \in]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$ et que $v_n \in]\ell'-\varepsilon,\ell'+\varepsilon[$. En particulier, $u_n > \ell-\varepsilon = (\ell+\ell')/2$ et $v_n < \ell' + \varepsilon = (\ell + \ell')/2$. Donc à partir d'un certain rang $v_n < u_n$. Par contraposition, on obtient le résultat énonce. □

! A fortiori si $u_n < v_n$, on a aussi $\lim u_n \leq \lim v_n$. Mais il ne faut pas espérer obtenir $\lim u_n < \lim v_n$. Pour avoir un contre-exemple simple, on peut prendre (u_n) constante égale à 0 et $v_n = 1/2^n$. On a $u_n < v_n$ pour tout n mais les deux limites sont égales.

Il est encore plus intéressant de voir que les comparaisons permettent d'obtenir des résultats sur des suites dont on ne connaît même pas la convergence.

Proposition 2.17

Soient (u_n) et (v_n) deux suites pour lesquelles il existe un rang n_0 tel que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq n_0$. Si (u_n) tend vers $+\infty$ alors (v_n) tend vers $+\infty$. Si (v_n) tend vers $-\infty$ alors (u_n) tend vers $-\infty$.

Démonstration : Supposons que (u_n) tende vers $+\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $u_n \geq M$ par définition. Donc à partir du rang $n_2 = \max(n_0,n_1)$, on a $v_n \geq u_n \geq M$. Cela montre que (v_n) tend vers l'infini. La démonstration de l'autre cas est symétrique. □

Il faut bien se rendre compte à quel point ce résultat est logique : si on est plus grand qu'une suite qui explose vers $+\infty$, alors on ne peut qu'exploser vers $+\infty$ (éventuellement même « encore plus vite »). Comprendre un tel résultat évitera d'avoir à l'apprendre par cœur et surtout de se tromper dans les sens des inégalités. Cela évitera aussi de tomber dans le piège suivant.

! Si la limite de (u_n) est finie, alors on ne peut rien dire sur (v_n) qui pourrait tout à fait diverger en oscillant, diverger vers $+\infty$ ou tendre vers une limite finie (seulement dans ce dernier cas la Proposition 2.16 peut donner une information sur cette limite grâce à la comparaison). Par exemple si (u_n) est la suite constante égale à 0, la comparaison $u_n \leq v_n$ dit juste que (v_n) est positive. On peut donc avoir plein de différents comportements $v_n = 2 + (-1)^n$ ou $v_n = n$ ou encore $v_n = 1\ldots$

Corollaire 2.18

Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$ et (v_n) une suite minorée, alors $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$. Symétriquement, si (u_n) est une suite qui tend vers $-\infty$ et (v_n) une suite majorée, alors $(u_n + v_n)$ tend vers $-\infty$.

Démonstration : Nous n'allons considérer que le premier cas, le second étant symétrique. Soit $M \in \mathbb{R}$ un minorant de (v_n), par définition, on a $u_n + v_n \geq u_n + M$. Comme (u_n) tend vers $+\infty$, $(u_n + M)$ tend aussi vers $+\infty$ (puisque la constante M est une suite constante qui tend vers $M \in \mathbb{R}$). D'après la proposition 2.17, $u_n + v_n \longrightarrow +\infty$. □

Exemples :

- La suite (u_n) définie par $u_n = n+(-1)^n$ tend vers $+\infty$. En effet, on a $u_n \geq n-1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- La suite (u_n) définie par récurrence par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + \ln(n+1)$ tend vers $+\infty$. En effet, on montre facilement par récurrence que $u_n \geq \ln n$.

Théorème 2.19 (théorème des gendarmes)

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. On suppose que

i) il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0 \ , \quad u_n \leq v_n \leq w_n \ ,$$

ii) les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite finie ℓ.

Alors (v_n) converge aussi vers ℓ.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_1 à partir duquel u_n et v_n sont dans $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. En particulier,

$$\ell - \varepsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < \ell + \varepsilon$$

ce qui montre que (v_n) tend aussi vers ℓ. □

L'image est assez simple : deux gendarmes encadrent v_n et la comprime de plus en plus vers ℓ. La suite est donc obligée de converger vers ℓ. De nouveau, la compréhension de ce théorème permet d'éviter d'en déformer l'énoncé. Ainsi il est important que les limites de (u_n) et (w_n) soient les mêmes. Si (u_n) tend vers 0 et (w_n) tend vers 2, alors (v_n) a de la marge pour faire un peu n'importe quoi dans l'intervalle $[0,2]$ (par exemple $v_n = 1 + \sin(n)$).

Le théorème suivant est un outil encore plus puissant. En effet, il permet d'obtenir la convergence de suites sans avoir supposé aucune convergence. Dans beaucoup d'applications, on cherche à avoir des suites qui approchent une certaine limite. On ne connaît pas cette limite et c'est justement pour cela qu'on en veut des valeurs approchées. Les approximations forment des suites dont on ne pourra pas directement montrer la convergence puisque la définition de la convergence contient le nombre limite… dont on ne sait pas ce qu'il est. C'est pour cela que le principe des suites adjacentes est puissant : on construit la limite sans la connaître au départ et on obtient même un encadrement de cette limite. Nous verrons plus bas l'exemple de l'approximation de $\sqrt{a}$ par l'algorithme de Héron.

Théorème 2.20 (suites adjacentes)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites que l'on suppose **adjacentes** c'est-à-dire que :

i) la suite (u_n) est croissante,

ii) la suite (v_n) est décroissante,

iii) on a $|u_n - v_n| \to 0$ quand n tend vers $+\infty$.

Alors (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et on a l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \ u_n \leq \ell \leq v_n\ .$$

Démonstration : D'après la définition de la convergence, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - v_n| \leq 1$. En particulier, à partir de ce rang, $v_n \geq u_n - 1$. D'après la monotonie des suites, si $n \geq n_0$, on a $v_n \geq u_n - 1 \geq u_{n-1} - 1 \geq \ldots \geq u_0 - 1$. Pour $n \leq n_0$, on a aussi $v_n \geq v_{n_0} \geq u_{n_0} - 1 \geq u_0 - 1$. La suite (v_n) est donc décroissante et minorée, elle converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ d'après le théorème 2.12. Par ailleurs, la preuve de ce théorème montre bien que ℓ est la borne inférieure de (v_n) et donc que $\ell \leq v_n$ pour tout n.
On peut faire le raisonnement symétrique pour (u_n) et montrer qu'elle converge vers une limite $\ell' \in \mathbb{R}$. Il reste à voir qu'il s'agit en fait de la même limite. Mais

comme les deux suites convergent, leur différence $u_n - v_n$ tend vers $\ell' - \ell$ et donc $|u_n - v_n|$ tend vers $|\ell' - \ell|$. Par hypothèse, ce nombre est égal à 0 donc $\ell = \ell'$. $\square$

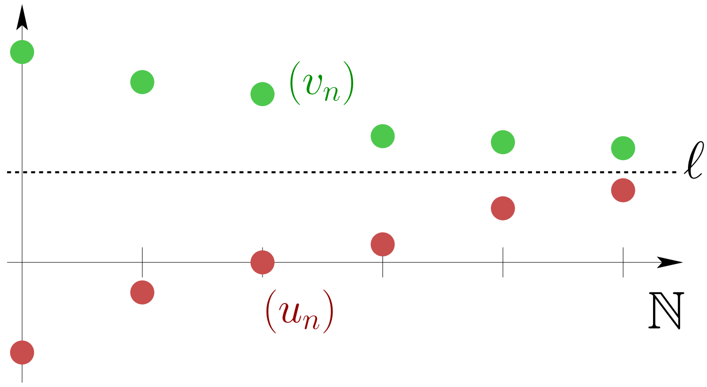
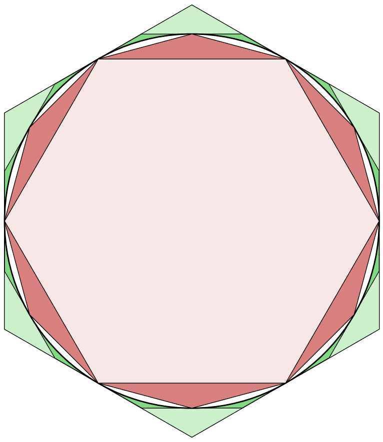


FIGURE 2.3 – *Illustration des suites adjacentes. La limite ℓ n'a pas à être connue à l'avance : elle se construit par approximations progressives par l'encadrement $\ell \in [u_n,v_n]$.*

Exemples :

- Un exemple très visuel est donné par la méthode de quadrature du cercle qu'a utilisée Archimède au IIIème siècle avant J.C. pour donner l'encadrement $3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$. On note u_n la surface du polygone à 6×2^n côtés inscrit dans le cercle et v_n la surface du polygone à 6×2^n côtés circonscrit au cercle. On part donc d'un hexagone puis on double le nombre de côtés comme sur la figure jointe. Il est clair que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante et on peut se convaincre que $u_n - v_n \to 0$. Le calcul de u_n et v_n peut se faire par itération de formules trigos. On obtient deux suites adjacentes qui donnent des approximations de plus en plus proches de π. Archimède avait été jusqu'à $n = 5$, c'est-à-dire pour des polygones à 96 côtés, obtenant les trois premiers chiffres significatifs de π.



- On considère les suites (u_n) et (v_n) données par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!} \; .$$

  Comme u_n est une somme de plus en plus grande de termes positifs, la suite (u_n) est clairement croissante. On peut montrer que (v_n) est décroissante (calcul laissé au lecteur ou aux TDs). Comme $|u_n - v_n| = 1/n! \to 0$, il s'agit de deux suites adjacentes. La puissance du théorème 2.20 est de montrer qu'elles convergent, même si on ne sait rien de cette limite. Il se trouve que leur limite est un nombre important en mathématique, on va donc lui donner un nom : c'est le nombre e. On peut ainsi s'autoriser à écrire

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

- On considère la suite (S_n) de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \ .$$

Il s'agit d'une série, c'est-à-dire d'une somme avec de plus en plus de termes. En particulier, $S_{n+1} - S_n = (-1)^n/(n+1)$. On voit que la suite des indices pairs $u_n := S_{2n}$ est croissante car $u_{n+1} - u_n = S_{2n+2} - S_{2n} = -1/(2n+2) + 1/(2n+1) > 0$ et de même la suite des indices impairs $v_n := S_{2n+1}$ est décroissante car $v_{n+1} - v_n = 1/(2n+3) - 1/(2n+2) < 0$. Par ailleurs, $|v_n - u_n| = |S_{2n+1} - S_{2n}| = 1/(2n+1) \longrightarrow 0$. Donc (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes et d'après le théorème 2.20 elles convergent vers la même limite. On peut alors montrer facilement (cf exercice du TD) que le fait que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite implique que (S_n) converge toute entière vers cette limite. En fait, on peut montrer (niveau L2) que cette limite est $\ln 2$, c'est-à-dire qu'on peut écrire, en en donnant un sens rigoureux,

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

5 Suites récurrentes

5.1 Suites arithmético-géométriques

Les suites arithmético-géométriques sont les suites (u_n) qui suivent une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ avec a et b deux constantes réelles. Cette classe de suites contient évidemment les suites arithmétiques ($a = 1$) comme les suites géométriques ($b = 0$). Elles aussi simples à traiter que ces deux cas grâce au résultat suivant.

Théorème 2.21 (suites arithmético-géométriques)

Soient a et b deux réels et soit (u_n) la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation $u_{n+1} = au_n + b$. Si $a = 1$, alors $u_n = u_0 + nb$. Sinon

$$u_n \ = \ a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a} \qquad (a \neq 1).$$

Démonstration : Si $a = 1$, (u_n) est une suite arithmétique, ce que nous avons déjà traité. Si $a \neq 1$, il suffit de vérifier que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - b/(1-a)$ est une suite géométrique de raison a. Les détails sont laissés au lecteur. □

Exemples :

- On s'intéresse à la température (T_n) d'un objet placé dans une pièce à la température T_{ext} supposée constante, le temps n étant compté en unité discrète (en secondes ou en minutes par exemple). Joseph Fourier a énoncé à Grenoble en 1822 que le transfert de chaleur est proportionnel à la différence de température, c'est-à-dire que l'évolution de la température suit la loi $T_{n+1} - T_n = -\alpha(T_n - T_{\text{ext}})$ avec $\alpha \in (0,1)$ un coefficient dépendant des matériaux et de la géométrie de l'objet. On a donc $T_{n+1} = (1-\alpha)T_n + \alpha T_{\text{ext}}$. La formule ci-dessus donne donc que $T_n = (1-\alpha)^n(T_0 - T_{\text{ext}}) + T_{\text{ext}}$, c'est-à-dire que T_n tend exponentiellement vite vers la température d'équilibre de la pièce, et d'autant plus vite que α est grand.

- Une personne a emprunté 10.000 € à un taux de 2 % qu'elle rembourse au rythme de 1.000 € par an. On note (u_n) le montant qu'il reste à rembourser à l'année n en milliers d'euros. Le mécanisme est le suivant : chaque année, la personne verse à sa banque 1 k€, la banque en prélève 2 % du montant u_n qu'il restait à rembourser et le reste des 1 k€ sert à diminuer le montant à rembourser. L'année n, elle paye donc $0{,}02u_n$ d'intérêt et rembourse $1 - 0{,}02u_n$ de capital. La suite (u_n) vérifie donc $u_{n+1} = u_n - (1 - 0{,}02u_n) = 1{,}02u_n - 1$. C'est une suite arithmético-géométrique et on obtient que $u_n = 50 - 40 \times 1{,}02^n$. Au bout de 11 ans, $u_n \simeq 0{,}265$. Donc il faudra que l'emprunteur paye 11 annuités puis un dernier versement de 265 €.

5.2 Suites à récurrence linéaire d'ordre 2

Nous allons étudier le cas des suites (u_n) qui sont définies par la donnée de u_0, de u_1 et d'une récurrence $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$ avec a et b deux constantes. Avant le résultat, nous allons procéder à une analyse montrant comment on peut arriver à des formules. L'idée de base est que les suites vérifiant (2.1) forment un espace vectoriel de dimension 2 (paramétré par la donnée de u_0 et u_1). Donc si on connaît deux suites indépendantes de cet espace, elles en formeront une base. Cherchons des suites simples sous la forme $u_n = \lambda^n$. Si une telle suite vérifie (2.1), alors on doit avoir $\lambda^{n+1} = a\lambda^n + b\lambda^{n-1}$ et donc $\lambda^2 = a\lambda + b$. Si cette équation a deux solutions distinctes λ_1 et λ_2, alors les suites vérifiant (2.1) s'écrivent sous la forme $u_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ par linéarité. Il suffit alors d'ajuster a et b pour que les conditions initiales soient satisfaites et on tombe sur la formule du théorème suivant.

Théorème 2.22 (suites à récurrence linéaire d'ordre 2)

Soient a et b deux nombres complexes et soit (u_n) la suite définies par la donnée de u_0, de u_1 et par la récurrence

$$u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}\ . \tag{2.1}$$

On considère l'équation polynomiale de degré 2

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0\ . \tag{2.2}$$

- Si l'équation (2.2) admet deux racines distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors

$$u_n = \frac{u_1 - \lambda_2 u_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \lambda_1^n + \frac{u_1 - \lambda_1 u_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \lambda_2^n\ .$$

- Si l'équation (2.2) a une racine double $\lambda \neq 0$, alors

$$u_n = u_0\lambda^n + \frac{u_1 - \lambda u_0}{\lambda} \cdot n\lambda^n\ .$$

- Si l'équation (2.2) a $\lambda = 0$ pour une racine double, alors c'est que $a = b = 0$ et la suite est u_0, u_1, 0, 0...

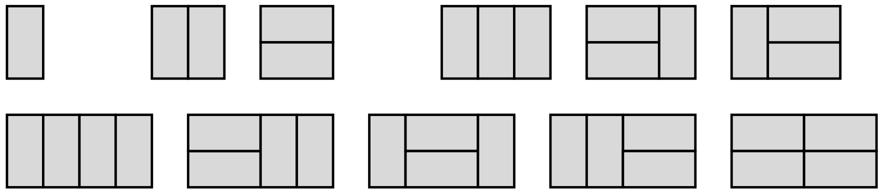
Démonstration : Nous n'avons pas besoin de véritablement préciser l'analyse effectuée avant le théorème. Pour prouver ce dernier, il suffit de faire la synthèse en prenant pour acquises ces formules tombées du ciel. Par exemple, supposons que $\lambda \neq 0$ est une racine double. Alors $\lambda^2 = a\lambda + b$ mais aussi $2\lambda = a$ (la racine annule le polynôme et sa dérivée). Posons $v_n = u_0\lambda^n + \beta n\lambda^n$ avec $\beta = \frac{u_1 - \lambda u_0}{\lambda}$. Pour $n = 0$, la formule donne bien $v_0 = u_0$. Pour $n = 1$, on obtient $v_1 = u_0 + \frac{u_1 - \lambda u_0}{\lambda} \cdot \lambda = u_1$. Montrons que la formule passe la relation de récurrence :

$$\begin{aligned}
av_n + bv_{n-1} &= a\big(u_0\lambda^n + \beta n\lambda^n\big) + b\big(u_0\lambda^{n-1} + \beta(n-1)\lambda^{n-1}\big) \\
&= a(u_0 + (n-1)\beta)\lambda^n + a\beta\lambda^n + b(u_0 + (n-1)\beta)\lambda^{n-1} \\
&= \big(u_0 + (n-1)\beta\big)\lambda^{n-1}(a\lambda + b) + a\beta\lambda^n \\
&= \big(u_0 + (n-1)\beta\big)\lambda^{n-1}\lambda^2 + 2\lambda\beta\lambda^n = u_0\lambda^{n+1} + \beta(n+1)\lambda^{n+1} \\
&= v_{n+1}
\end{aligned}$$

Comme il est clair que les données initiales et la relation de récurrence permettent de calculer de façon unique la suite de proche en proche, on a bien égalité entre u_n et la formule v_n. □

Exemple :

En application, nous allons compter combien il y a de façons F_n de paver un rectangle $2 \times n$ avec des dominos 2×1. Les premiers essais montrent que $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_3 = 3$ et $F_4 = 5$.



Imaginons maintenant que nous connaissons $F_1, \ldots, F_n$. Nous voulons paver le rectangle $2 \times (n+1)$. On peut soit mettre à droite un domino vertical puis paver le reste comme un rectangle $2 \times n$, soit mettre à droite deux dominos horizontaux puis paver le reste comme un rectangle $2 \times (n-1)$. On obtient donc que $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \ldots$ c'est la suite de Fibonacci ! Voici l'occasion de démontrer la formule du début du chapitre. L'équation caractéristique est $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ qui a pour racines $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ et $\phi' := -1/\phi = (1-\sqrt{5})/2$. Pour voir que la deuxième racine est bien $-1/\phi$, on remarquera que le produit des racines vaut le coefficient constant -1 (ou on fait le calcul). On notera que $F_0 = 1$ et $F_1 = 1$, que $\phi - \phi' = \sqrt{5}$, $1 - \phi' = \phi$ et $1 - \phi = \phi'$. On trouve au final

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^{n+1} - (-1/\phi)^{n+1}\right) .$$

Par exemple, il y a 89 façons de paver le rectangle 2×10.

5.3 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Le cas le plus général pour une suite récurrente d'ordre 1 est celui d'une suite (u_n) définie par la donnée de u_0 et d'une récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

avec f une fonction continue voire dérivable. C'est un cas trop général pour permettre d'obtenir une formule pour u_n ou même pour savoir si elle converge. Nous verrons l'exemple plus loin de la suite logistique qui peut même avoir des comportements chaotiques. Si on prend $f(x) = -x$, alors on obtient la suite $u_n = (-1)^n u_0$ qui oscille de période 2. On peut obtenir aussi des cycles de longueur 3, par exemple en prenant une fonction f telle que $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ et $f(3) = 1$. Pour en obtenir une, il suffit de faire un graphe qui passe par ces trois points imposés, voir la figure 2.4.

Dans le cas où la suite (u_n) converge, alors elle converge obligatoirement vers un point fixe de la fonction.

Proposition 2.23

Si (u_n) est une suite qui admet une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et qui converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ et si f est définie et continue au point ℓ, alors ℓ est un point fixe de f, c'est-à-dire que $\ell = f(\ell)$.

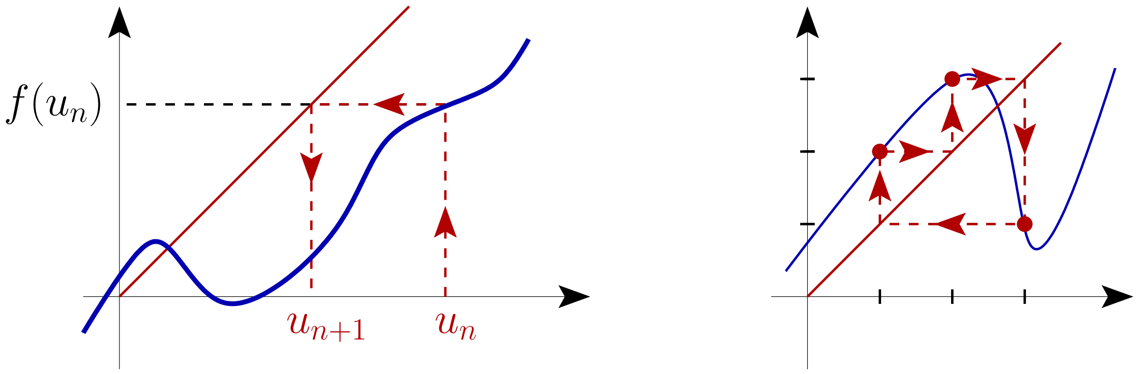


FIGURE 2.4 – *À gauche, une construction graphique du point $u_{n+1} = f(u_n)$ qui utilise la droite d'équation $y = x$ permettant de renvoyer l'ordonnée $y = f(u_n)$ sur l'abscisse $u_{n+1} = f(u_n)$. À droite, un exemple de fonction admettant le cycle $1 \to 2 \to 3 \to 1$ pour la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.*

Démonstration : On anticipe sur le chapitre suivant en admettant la notion de continuité connue. On a alors que $u_n \to \ell$ implique que $f(u_n) \to f(\ell)$. Mais comme u_{n+1} tend aussi vers ℓ, en passant à la limite dans l'équation de récurrence, on a $\ell = f(\ell)$. □

Cela permet donc de connaître la limite dans certains cas. Notons que sous son air simple, cette proposition contient un bonus : l'existence d'un point fixe dans I qui n'est pas supposée au départ.

Proposition 2.24

Soit $I = [a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue de I sur I, i.e. telle que $f(I) \subset I$. On suppose que soit $f(x) \geq x$ pour tout $x \in I$, soit $f(x) \leq x$ pour tout $x \in I$. Alors toute suite récurrente définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ reste dans I et converge vers un point fixe de f dans I.

Démonstration : Comme $f(I) \subset I$, si u_0 est dans I, alors $u_1 = f(u_0)$ est aussi dans I et par une récurrence triviale, toute la suite (u_n) reste dans I et est donc bien définie. Si $f(x) \geq x$ sur I, alors $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$ et donc (u_n) est croissante. Comme elle est majorée par b, elle converge et la proposition 2.23 conclut. Symétriquement, si $f(x) \leq x$ sur I, la suite (u_n) est décroissante minorée et donc convergente. □

On peut utiliser cette proposition pour des fonctions un peu plus complexes mais pour lesquelles on peut découper l'intervalle d'étude en sous-intervalles sur lesquels cette proposition s'applique, voir la figure 2.5.

Nous allons encore regarder un dernier cas souvent utile : celui des points fixes dits *attractifs*. En pratique, l'hypothèse de cette proposition se démontrera à l'aide du théorème des accroissements finis que nous verrons dans le chapitre suivant.

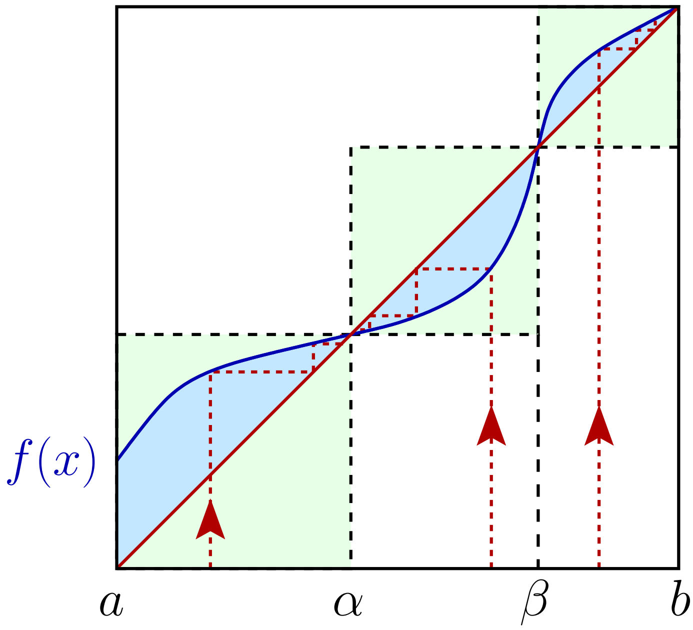


FIGURE 2.5 – *La fonction f envoie l'intervalle $I = [a,b]$ sur lui-même et possède trois points fixes α, β et b. Par ailleurs, cette fonction laisse stable les intervalles $[a,\alpha]$, $[\alpha,\beta]$ et $[\beta,b]$. On peut donc appliquer la proposition 2.24 sur chacun de ces intervalles. On trouve que si $u_0 \in [a,\alpha]$, la suite converge vers α ; si si $u_0 \in [\alpha,\beta[$, la suite converge vers α ; si $u_0 = \beta$, la suite est constante égale à β ; et enfin si $u_0 \in]\beta,a]$, la suite converge vers a. On dit que α et b sont des points fixes attractifs ou stables, alors que b est répulsif ou instable.*

Proposition 2.25 (point fixe attractif)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$. Supposons que I contient un point fixe α qui est attractif dans le sens où il existe une constante positive k telle que $k < 1$ et

$$\forall x \in I \ , \ \ |f(x) - \alpha| \leq k|x - \alpha| \ .$$

Alors si (u_n) est une suite récurrente définie par la donnée de $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, alors (u_n) converge vers α.

Démonstration : Par construction, on a $|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$. La suite $v_n = u_n - \alpha$ vérifie donc

$$0 \leq |v_n| \leq k|v_{n-1}| \leq k^2|v_{n-2}| \leq \ldots \leq k^n|v_0| \ .$$

Comme $|k| < 1$, on a $k^n \to 0$ et par le théorème des gendarmes, (v_n) tend vers 0. Donc $u_n = v_n + \alpha$ tend vers α. $\square$

Exemples :

- On s'intéresse aux suites définies par la donnée initiale $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Ce sont des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f = \sin$. Comme le sinus ne prend que des valeurs entre -1 et 1, u_n sera dans $I = [-1{,}1]$ pour tout $n \geq 1$ et $f(I) \subset I$. Plus précisément, f laisse stable $[-1{,}0]$ et $[0{,}1]$. Comme $|\sin x| \leq |x|$, on a aussi $0 \geq f(x) \geq x$ pour tout $x \in [-1{,}0]$ et $0 \leq f(x) \leq x$ pour tout $x \in [0{,}1]$. Enfin, $x = 0$ est le seul point fixe du sinus. D'après la proposition 2.24, toutes les suites récurrentes $u_{n+1} = \sin(u_n)$ convergent donc vers 0.

- On considère la suite définie par $u_0 = 0$ puis $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$. Ses premiers termes sont donc

$$1 = \sqrt{1} \qquad \sqrt{1+\sqrt{1}} \qquad \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}} \qquad \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}} \quad \text{etc.}$$

C'est une suite récurrente avec $f(x) = \sqrt{1+x}$. La fonction f est croissante. Cherchons ses points fixes : si $f(\alpha) = \alpha$, alors $(1 + \alpha) = \alpha^2$ et donc α est soit le nombre d'or ϕ soit $-1/\phi$, mais ce dernier est négatif et donc ne peut vérifier $\alpha = \sqrt{1+\alpha}$. Le nombre ϕ est donc le seul point fixe de f. Par ailleurs, si $x \in [0{,}\phi]$, alors $f(x) = \sqrt{1+x} \geq 0$ et $f(x) \leq \sqrt{1+\phi} = \phi$. Donc le segment $[0{,}\phi]$ est stable par f. Enfin, si $x \in [0{,}\phi]$, alors x est entre les racines ϕ et $-1/\phi$ de $x^2 - x - 1$ et donc $x^2 - x - 1 \leq 0$. On obtient $x^2 \leq x + 1$ et comme les nombres considérés sont positifs et que la racine carrée est croissante, alors $x \leq \sqrt{1+x} = f(x)$. En conclusion, on peut donc appliquer la proposition 2.24 pour obtenir que (u_n) tend vers le nombre d'or ϕ. En abusant un peu des notations, on peut donc écrire la jolie formule

$$\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}}}\,.$$

6 Suites et topologie

Dans cette partie, nous allons voir quelques notions et théorèmes qui sont fondamentaux dans plusieurs domaines des mathématiques. Nous ne les utiliserons pas tant que cela cette année et c'est pour cela qu'ils ne sont pas centraux pour ce cours. Mais ils serviront pour plusieurs démonstrations importantes et surtout pour les années suivantes.

Nous avons déjà parlé des suites de Cauchy qui jouent un rôle central dans la construction des réels dans le cours de Louis Augustin Cauchy (1789-1857, France).

Définition 2.26

Une suite (u_n) est dite **de Cauchy** si

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \ \ \forall p,q \geq n_0 \ , \ \ |u_p - u_q| < \varepsilon \ .$$

Une suite de Cauchy est donc une suite dont tous les termes finissent par être aussi proches que l'on veut les uns des autres. Attention, il ne s'agit pas seulement de comparer u_p et u_{p+1} mais bien tous les u_p et u_q pour p et q assez grand, donc aussi u_p et u_{p+2}, u_{p+100}... L'intérêt des suites de Cauchy, c'est qu'elles apportent un critère de convergence sans même savoir quoi que ce soit sur la limite potentielle.

Plus précisément, une des implications est toujours vraie (même dans des espaces autres que $\mathbb{R}$).

Proposition 2.27

Si (u_n) est une suite convergente, alors elle est de Cauchy.

Démonstration : Soit $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de (u_n). Prenons $\varepsilon > 0$ quelconque. Par définition de la limite, il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| < \varepsilon/2$. Pour tous p et q plus grands que n_0, on a donc

$$|u_p - u_q| = |u_p - \ell + \ell - u_q| \leq |u_p - \ell| + |\ell - u_q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

□

Mais la réciproque n'est pas vraie dans n'importe quel espace. Elle est vraie pour les réels et il s'agit d'une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, dans le sens où cette propriété provient de la construction même des réels. On ne pourra donc pas en donner une démonstration sans revenir à la construction de $\mathbb{R}$ qui n'est pas dans le cadre de ce cours et on admettra le théorème suivant.

Théorème 2.28 ($\mathbb{R}$ est complet)

Si $(u_n) \subset \mathbb{R}$ est une suite de Cauchy de réels, alors elle est convergente dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \to \ell$.

Exemple :

On considère la suite $w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin k}{k!}$. On a déjà vu plus haut que la suite $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ converge (vers e) et on sait donc que la suite (u_n) est de Cauchy d'après la proposition 2.27. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc n_0 tel que pour tout $p \geq q \geq n_0$, on a $|u_p - u_q| < \varepsilon$. Mais alors,

$$|w_p - w_q| = \left| \sum_{k=q+1}^{q} \frac{\sin k}{k!} \right| \leq \sum_{k=q+1}^{q} \left| \frac{\sin k}{k!} \right| \leq \sum_{k=q+1}^{q} \frac{1}{k!} = |u_p - u_q| < \varepsilon \ .$$

On vient de démontrer que (w_n) est de Cauchy. D'après le théorème 2.28, cela montre que (w_n) converge, même si on ne sait pas pour le moment quelle est sa limite.

La notion suivante de sous-suites fait partie de ces définitions importantes dans le sens où elles peuvent servir dans des cadres beaucoup plus généraux que ceux de ce cours.

Définition 2.29

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On dit que (v_n) est une **suite extraite** ou bien une **sous-suite** de (u_n) s'il existe une **extraction** $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, c'est-à-dire une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$. Dans ce cas, on pourra noter directement $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ cette suite extraite.

Même si la définition peut être formelle, le principe est simple : dans la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, on a viré certains termes et on n'a gardé que certains éléments de la suite. La fonction φ indique quels termes sont gardés. Attention, il faut en garder une infinité (pour avoir encore une suite à la fin) et il ne faut pas revenir en arrière dans les numéros. Par exemple

$$v_0 = u_1 \ , \ \ v_1 = u_5 \ , \ \ v_2 = u_7 \ , \ \ v_3 = u_8 \ , \ \ v_4 = u_{12} \ , \ \ v_5 = u_{17} \ldots$$

est le début d'une sous-suite de (u_n) pour l'extraction φ dont les premières images sont

$$\varphi(0) = 1 \ , \ \ \varphi(1) = 5 \ , \ \ \varphi(2) = 7 \ , \ \ \varphi(3) = 8 \ , \ \ \varphi(4) = 12 \ , \ \ \varphi(5) = 17 \ldots$$

Par contre, après $\varphi(1) = 5$, on ne pourra pas revenir à $\varphi(2) = 3$.

Exemples :

- D'une suite (u_n), on ne garde que les termes d'indices pairs, c'est-à-dire la sous-suite (u_{2n}) qui correspond au choix $\varphi(n) = 2n$.

- D'une suite (u_n), on ne garde que les termes d'indices impairs, c'est-à-dire la sous-suite (u_{2n+1}) qui correspond au choix $\varphi(n) = 2n + 1$.

- La suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est aussi une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ qui correspond au choix $\varphi(n) = n + 2$.

- De la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$, on ne garde que la sous-suite $(\cos(\varphi(n)))$ des termes positifs. Dans ce cas, il est difficile de donner une formule pour φ, mais sa construction est simple : on regarde si un terme $\cos(n)$ est positif. Si oui, on le garde dans la sous-suite et on lui attribue le prochain numéro libre i.e. $\varphi(k + 1) = n$ si on a déjà gardé k termes. Sinon, on ne le prend pas et on passe au terme suivant. Ce faisant, il manque encore une démonstration pour prouver qu'une infinité de termes seront gardés, mais ce n'est pas l'objet ici.

Proposition 2.30

Si (u_n) est une suite convergente vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors toutes ses sous-suites convergent vers ℓ. Si (u_n) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), alors toutes ses sous-suites tendent vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Démonstration : Faisons un seul des trois cas. Supposons par exemple que (u_n) est une suite qui tend vers $+\infty$ et soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extraction. Commençons par une remarque importante : si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors $\varphi(n) \geq n$ (récurrence rapide laissée au lecteur). Soit $M \in \mathbb{R}$, on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq M$. On a alors pour tout $n \geq n_0$ que $\varphi(n) \geq n \geq n_0$ et donc $u_{\varphi(n)} \geq M$. Ceci montre que $(u_{\varphi(n)})$ tend vers $+\infty$. □

Exemple :

On regarde la suite définie par $u_n = (-1)^n$. La suite des indices pairs est donnée par $u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$. Comme elle est constante égale à 1, elle converge vers 1.La suite des indices impairs est donnée par $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$, et elle converge donc vers -1. Ces deux sous-suites convergent vers des limites différentes. Ce n'est donc pas possible que (u_n) converge vers un réel ou tende vers $\pm\infty$.

Le théorème suivant touche à ce qu'on appelle la *compacité*. C'est une notion topologique qui sera généralisée à d'autres espaces plus tard. Son nom Il vient des mathématiciens Bernard Bolzano (1781-1848, Hongrie) et Karl Weierstrass (1815-1897, Allemagne).

Théorème 2.31 (Bolzano-Weierstrass)

Soit (u_n) une suite bornée de réels. Alors on peut en extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge.

Démonstration : Nous allons voir comment déduire ce résultat de la complétude de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire du théorème 2.28. Notre raisonnement consiste à appliquer une méthode de dichotomie. Comme (u_n) est bornée, il existe un segment $[a_0,b_0]$ tel que $u_n \in [a_0,b_0]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On prend $\varphi(0) = 0$. Soit $m = (a_0 + b_0)/2$ le milieu de $[a_0,b_0]$. Comme il y a une infinité de termes de la suite dans $[a_0,b_0]$, il faut bien qu'il y en ait une infinité dans au moins une des moitié $[a_0,m]$ et/ou $[m,b_0]$ (principe des tiroirs). On note $[a_1,b_1]$ une des moitiés qui convient et on pose $\varphi(1)$ comme le premier $n > \varphi(0) = 0$ tel que u_n soit dans $[a_1,b_1]$. De nouveau, on prend le milieu $m = (a_1 + b_1)/2$. Comme il y a une infinité de termes de la suite dans $[a_1,b_1]$, il faut bien qu'il y en ait une infinité dans au moins une des moitié $[a_0,m]$ et/ou $[m,b_0]$, que l'on note $[a_2,b_2]$. On pose $\varphi(2)$ comme le premier $n > \varphi(1)$ tel que u_n soit dans $[a_2,b_2]$. De proche en proche, on peut extraire ainsi une sous-suite. À partir du rang n_0, tous les termes de la sous-suite se retrouvent dans un intervalle de taille

$2^{-n_0}|b_0 - a_0|$ puisqu'on divise l'intervalle considéré par deux à chaque étape. Cela montre que cette sous-suite est une suite de Cauchy. Le théorème 2.28 nous dit qu'elle converge donc. $\square$

Quand on parle de compacité, on pense plutôt à prendre une suite de points dans un ensemble. La version topologique du théorème précédent s'énoncera plutôt comme suit.

Corollaire 2.32 (compacité dans $\mathbb{R}$)

Soient $a < b$ deux réels. Soit $(x_n) \subset [a,b]$ une suite de points de l'intervalle fermé borné $[a,b]$, alors on peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers une limite $\ell \in [a,b]$.

Démonstration : Comme $a \leq x_n \leq b$ pour tout n, la suite est bornée et on peut utiliser le théorème précédent pour en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Comme $x_{\varphi(n)} \geq a$ pour tout n, les théorèmes de comparaison nous disent que $\ell \geq a$. De même, on obtient que $\ell \leq b$, ce qui conclut. $\square$

7 Quelques exemples concrets supplémentaires

7.1 La méthode de Héron

Il y a plus de 3.000 ans, les savants de l'antiquité mésopotamienne et égyptienne savaient extraire des racines carrées. On trouve ainsi des tablettes d'argile avec la valeur de la diagonale d'un carré montrant qu'ils savaient calculer $\sqrt{2}$ à la précision du millionième. Les scribes n'ont pas expliqué leur méthode, mais on pense qu'il s'agit du même algorithme que celui utilisé par les grecs plusieurs siècles plus tard. Il est appelé *méthode de Héron* ou *méthode babylonienne*. L'idée est géométriquement simple. Supposons que l'on veuille calculer $\sqrt{a}$, cela revient à trouver quel est le côté d'un carré de surface a. On part d'un rectangle de surface a, par exemple de côtés $u_0 = a$ et $v_0 = 1$ (en pratique, il est plus rapide de partir d'une meilleure approximation du bon carré, par exemple $u_0 = 4$ et $v_0 = 2{,}5$ pour calculer $\sqrt{10}$). Ce premier rectangle a la bonne surface mais n'est pas un carré. Pour le rendre « plus carré », on prend comme nouveau côté la moyenne des côtés en posant $u_1 = (u_0+v_0)/2$ et donc $v_1 = a/u_1$. Notre nouveau rectangle est encore d'aire a mais il est proche du carré. On itère ainsi le procédé et on se rapproche de plus en plus de la racine carrée cherchée.

Un calcul de $\sqrt{2}$ datant de plus de 3.500 ans

Mathématiquement parlant, comme $v_n = a/u_n$, cela revient à partir de $u_0 = a$ et itérer la récurrence

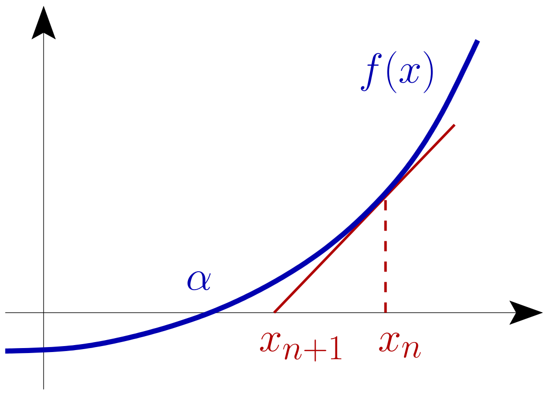
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) . \tag{2.3}$$

L'étude de la fonction $f : x \mapsto (x + a/x)/2$ montre qu'elle est décroissante sur $]0,\sqrt{a}]$ et croissante sur $[\sqrt{a}, +\infty[$ et que $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$. En particulier, f envoie $[\sqrt{a}, +\infty[$ sur lui-même et pour tout n, $u_n \geq \sqrt{a}$. On a alors que $v_n = a/u_n \leq \sqrt{a}$ et donc que $u_{n+1} = (u_n + v_n)/2 \leq (u_n + u_n)/2 = u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par $\sqrt{a}$ et elle converge vers un réel $\ell \geq \sqrt{a}$. En passant à la limite dans (2.3), on obtient que $\ell = (\ell + a/\ell)/2$ ce qui donne $\ell^2 = a$. Comme ℓ est positive, on a donc $\ell = \sqrt{a}$.

Pour obtenir une bonne approximation de $\sqrt{a}$, il suffit donc de partir d'une valeur raisonnable et d'itérer la formule (2.3) qui n'est composé que d'opérations élémentaires. On peut prouver que cette méthode est très efficace car elle converge quadratiquement : à chaque étape, on double le nombre de chiffres exacts de notre approximation.

7.2 L'algorithme de Newton

La méthode de Newton est utilisée pour approcher les zéros de fonctions. Considérons une fonction f dont on veut trouver un zéro α, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(\alpha) = 0$. L'idée géométrique est de partir d'une valeur assez proche x_0, puis d'approcher la fonction f par sa tangente en x_0 et de prendre comme nouvelle position x_1 le zéro de cette tangente. Puis on recommence le procédé et on espère que la suite (x_n) tende bien vers α. Ce n'est pas toujours le cas et l'algorithme peut échouer, ne serait-ce que si la tangente que l'on regarde est horizontale et donc n'a pas de zéro. La méthode a été introduite par Isaac Newton en 1669 mais celui-ci ne l'a utilisée que pour les polynômes. Il a fallu un peu de temps avant que l'on comprenne la généralité de l'algorithme et qu'il prenne sa forme moderne.



Concrètement, si f est dérivable, sa tangente au point x_n est la droite d'équation $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$. Comme x_{n+1} est le zéro de cette tangente, on a

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} . \tag{2.4}$$

Supposons que sur l'intervalle $[\alpha,x_0]$, la fonction f soit croissante. Elle est donc positive et f' est positive aussi. On obtient alors que $x_{n+1} \leq x_n$. Supposons en outre que f soit convexe sur $[\alpha,x_0]$, elle est alors au-dessus de ses tangentes et $\alpha \leq x_{n+1}$ (voir la figure ci-dessus). Sous ces hypothèses, la suite (x_n) est donc décroissante et minorée par α et elle converge vers une limite $\ell \in [\alpha,x_0]$. En passant à la limite dans

(2.4), on a que $\ell = \ell - f(\ell)/f'(\ell)$ et donc que $f(\ell) = 0$. Comme α est le seul zéro de f dans l'intervalle considéré, $\ell = \alpha$. On vient de montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et convexe sur $[\alpha,x_0]$, alors la suite (x_n) partant de x_0 et définie par la récurrence (2.4) converge vers la solution de l'équation $f(\alpha) = 0$. On peut montrer que cette convergence est en fait très rapide si elle a lieu.

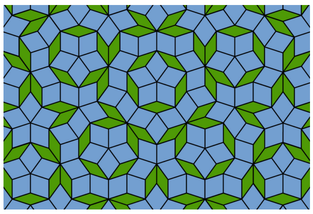
Une application simple de l'étude précédente est le cas du plus grand zéro des polynômes scindés. Prenons par exemple $f(x) = x^2 - a$ avec $a \in \mathbb{R}$. La fonction f est croissante pour $x \geq 0$ et convexe sur $\mathbb{R}$. Si on part d'un point $x_0 \geq \sqrt{a}$ et qu'on itère la méthode de Newton, la suite (x_n) va donc converger vers $\sqrt{a}$. Dans le cas $f(x) = x^2 - a$, (2.4) devient

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{a}{x_n}\big) \ .$$

On retrouve la méthode de Héron !

7.3 Un quasi-cristal de Fibonacci

Un cristal est une structure atomique régulière avec un motif qui se répète périodiquement. On peut mathématiquement classer les 230 structures périodiques possibles en dimension 3. Mais en 1982, Dan Shetchman obtient un solide de structure qui semble régulière mais avec une symétrie d'ordre 5 qui ne correspond à aucune structure périodique possible. Il s'agit de ce qu'on appelle maintenant un *quasi-cristal* qui présente une structure quasi-périodique qui avait déjà été explorée par les mathématiciens comme Roger Penrose dans les années 70.



Un pavage quasi-périodique de Penrose

Nous allons étudier le cas plus élémentaire d'un quasi-cristal 1D qui donne déjà une idée de la façon de construire des quasi-cristaux en plus grande dimension. On regarde un alignement composé d'atomes de type A et B. Un cristal 1D serait un mot périodique du type ABABABAB... ou bien AABAABAAB... qui présentent des motifs se répétant à l'infini. Nous allons construire un quasi-cristal suivant le *mot de Fibonacci*. On part des premiers mots A et B puis on agrandit le mot en concaténant les deux mots précédents. Ainsi, on obtient B+A=BA puis BA+B=BAB, BAB+BA=BABBA, BABBA+BAB=BABBABAB... On note que le mot suivant est une extension du précédent et on obtient ainsi un mot qu'on peut prolonger à l'infini et qui commence par

ABAABABAABAABABAABABAABAABABAABAAB...

Par construction, n'importe quel motif de ce mot se retrouve une infinité de fois et qu'on peut trouver des motifs qui se répètent de taille aussi grande que voulue (puisqu'on recolle le mot qui contient le motif à la suite de lui-même). Notre mot présente ainsi des répétitions typique d'un cristal. Mais si cela en était un, il faudrait qu'un motif se répète périodiquement.

Nous allons montrer que ce mot de Fibonacci n'est pas périodique. Notons u_n le nombre de lettres du mot en construction à la $n-$ième étape. On voit que ce nombre u_n suit la suite de Fibonacci $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ puis par concaténation $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

Mais si on regarde le nombre v_n de B dans le mot, on retrouve le même principe $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ puis $v_{n+1} = v_n + v_{n-1}$ et (v_n) suit aussi la suite de Fibonacci, mais décalée par rapport à (u_n), i.e. $v_n = u_{n-1}$. La proportion de B dans l'étape n est donc u_{n-1}/u_n qui tend vers le nombre d'or ϕ. Si le mot était périodique, c'est-à-dire composé d'un motif de longueur q se répétant tout les q atomes, alors la proportion de B tendrait vers p/q avec p le nombre de B dans ce motif. La proportion serait donc rationnelle, ce qui n'est pas le cas puisque ϕ est irrationnel. On vient donc de montrer que le mot de Fibonacci n'est pas un mot périodique même s'il présente des motifs qui se répètent (ces répétitions ne sont donc pas tout à fait régulières). C'est la caractéristique des quasi-cristaux.

7.4 Séries de Riemann

Piles de dominos, extraites du site « How round is your circle » par John Bryant et Chris Sangwin.

On considère une pile de dominos (de longueur disons 2 unités) que nous penchons pour former une avancée la plus grande possible. Le domino le plus haut, afin de ne pas tomber, ne doit pas être avancé de plus de sa moitié, c'est-à-dire 1 unité de longueur. Si nous avançons de 1 le domino en-dessous, les deux dominos basculeront. En fait, si on avance de d cet ensemble de deux dominos, il faut que

$$(2-d) + (2-d-1) \geq d + (d+1)$$

ce qui donne $d \leq 1/2$. Puis un calcul similaire montre que le troisième domino ne peut pas être avancé de plus de $1/3$ et par une récurrence, le $n-$ième domnio ne peut pas être décalé de plus de $1/n$ unité de longueur.

On note u_n la taille de l'avancée obtenu en décalant au maximum une pile de n dominos. On a donc

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} .$$

Jusqu'où peut-on aller, c'est-à-dire quelles longueurs peut-on atteindre avec u_n ? La réponse est qu'on peut aller aussi loin de l'on veut ! En effet, prenons $n = 2^p$, on regroupe les termes par paquets

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} = 1 + \boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \boxed{\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}}$$
$$+ \boxed{\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}} + \ldots + \boxed{\frac{1}{2^{p-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^p}} .$$

Le paquet $1/(2^{j-1}+1) + \ldots + 1/2^j$ contient 2^{j-1} termes qui sont tous plus grands que $1/2^j$ et donc est plus grand que $1/2$. On obtient donc que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2^p} \geq 1 + \frac{p}{2} .$$

La suite (u_n) est croissante et le calcul précédent montre qu'elle n'est pas bornée puisque $u_{2^p} \geq 1 + p/2$. Donc (u_n) diverge vers $+\infty$, ce que l'on pourrait traduire de façon informelle par

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = +\infty \ .$$

Ainsi, même si les décalages entre dominos sont de plus en plus petits, leur somme est aussi grande que l'on veut. Cette divergence est connue depuis le moyen-âge d'après les travaux du français Nicolas Oresme.

A propos de la situation présentée, on pourra consulter
`http ://images.math.cnrs.fr/Une-tour-de-cartes-qui-penche-a-l-infini.html`

Maintenant, nous considérons les suites (u_n) et (v_n) données par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n} \ .$$

Comme $u_{n+1} - u_n = 1/(n+1)^2$, la suite (u_n) est croissante. Comme

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)}$$

la suite (v_n) est décroissante. Il est clair que $|u_n - v_n| \to 0$ et donc il s'agit de suites adjacentes. On obtient donc que (u_n) converge vers une limite $\ell > 0$. Contrairement à l'exemple précédent, cette somme infinie de termes de plus en plus petits donne un résultat fini. La question de savoir si on pouvait exprimer cette limite a longtemps été ouvert jusqu'à ce qu'Euler montre en 1735 (pas complètement rigoureusement) que

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} \ .$$

7.5 Suite logistique

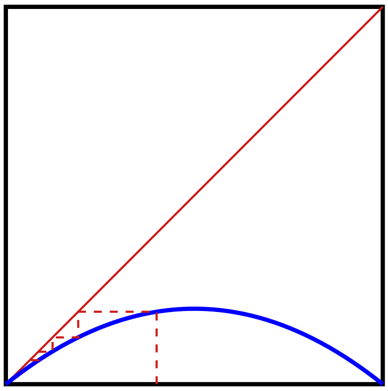
Nous avons vu plus haut des modèles simples de dynamique des populations sous la forme de suites géométriques $u_{n+1} = \lambda u_n$. Dans ces modèles, la population s'éteint ou grandit exponentiellement vite sans limitation. Si on veut faire intervenir une notion de surpopulation, il faut rajouter un terme pénalisant les populations trop fortes du type $-\alpha u_n^2$. Ce terme est le plus simple possible qui soit négligeable devant λu_n pour les petites populations mais l'emporte pour les plus grandes. En normalisant la taille de la population, on tombe sur le modèle logistique :

$$u_{n+1} = \lambda u_n (1 - u_n) \ .$$

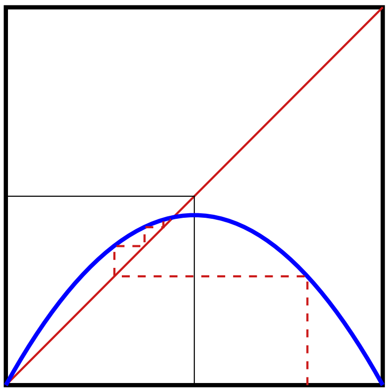
Notons que ce modèle est encore trop simpliste, surtout dans sa version discrète (il est plus réaliste si on regarde l'équation différentielle associée). Par exemple, si la population est trop grande, elle subit directement une chute qui peut conduire à l'extinction si $u_n = 1$, voire à des nombres négatifs si $u_n > 1$. Ce dernier cas est absurde pour le modèle et on va donc se limiter à prendre $u_0 \in [0,1]$ et $\lambda \in [0,4]$ de telle sorte que la fonction $f : x \longmapsto \lambda x(1 - x)$ envoie $[0,1]$ sur lui-même.

Malgré cette simplicité, ce modèle jouet montre que l'on peut obtenir des comportements dynamiques extrêmement différents en fonction de la valeur de λ. En particulier, il est possible d'obtenir des évolutions chaotiques, même avec une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ et f un simple polynôme de degré deux. Quand λ grandit de 0 à 4, on observe ce qu'on appelle des bifurcations, c'est-à-dire des moments où le comportement qualitatif change brusquement.

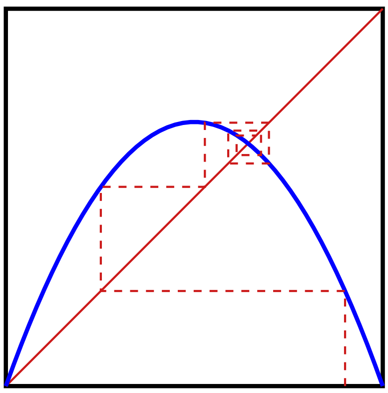
• 1er cas : $\lambda \leq 1$
Si λ est trop petit, la population décroît, même sans le terme de mortalité, car il n'y a pas assez d'enfants par génération. Mathématiquement, $f(x) \leq x$ pour tout $x \in [0,1]$ et donc la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ est forcément décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge. Comme 0 est le seul point fixe de f, la seule limite possible est 0 d'après la proposition 2.23. En fait, si $\lambda < 1$, on peut même appliquer la proposition 2.25 et obtenir une décroissance exponentielle.



• 2ème cas : $\lambda \in]1,2]$
Si λ est plus grand, alors 0 devient un point fixe répulsif (une petite population va croître exponentiellement) et un deuxième point fixe apparaît $\alpha = (\lambda - 1)/\lambda$. Par ailleurs, le maximum de f est atteint en $x = 1/2$ et on vérifie que $\alpha \leq 1/2$ et $f(1/2) \leq 1/2$. Cela montre que le segment $[1/2,1]$ est envoyé sur $[0,1/2]$ et que $[0,1/2]$ est envoyé sur lui-même. Toutes les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ finissent donc dans $[0,1/2]$ où f est croissante. On peut découper $[0,1/2]$ en deux parties où la proposition 2.24 s'applique. On montre ainsi que si $u_0 \in]0,1[$, alors la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers le point fixe α (les cas $u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$ restent trivialement sur la valeur 0). Notre population animale se stabilise sur une population optimale adaptée au milieu.



• 3ème cas : $\lambda \in]2,3]$
À partir de $\lambda > 2$, le point fixe α devient plus grand que $1/2$ et passe dans la zone où f est décroissante. Ce cas demande un peu plus d'étude, mais on peut le traiter avec les outils de ce chapitre. En analysant les différents intervalles et leur images, on montre que si $u_0 \in]0,1[$, alors la suite finit par tomber dans un intervalle où on peut appliquer la proposition 2.25. Elle se met alors à tendre vers α en oscillant autour. De nouveau, la population animale se stabilise sur la population optimale adaptée au milieu.



• Naissance du chaos : $\lambda \in]3{,}4]$
À partir de $\lambda > 3$, on observe une succession de bifurcations dites *doublement de période* qui engendre de plus en plus de cycles périodiques de longueur 2^n, voir la figure 2.2.6. Quand λ passe la valeur 3,57, la suite devient chaotique : on ne peut prévoir le futur de la population car une minuscule variation de la mesure de u_n peut amener des variations énormes dans le futur. C'est ce qu'on appelle « l'effet papillon » selon l'image d'Edward Lorenz qui demandait « Le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tornade au Texas ? ».

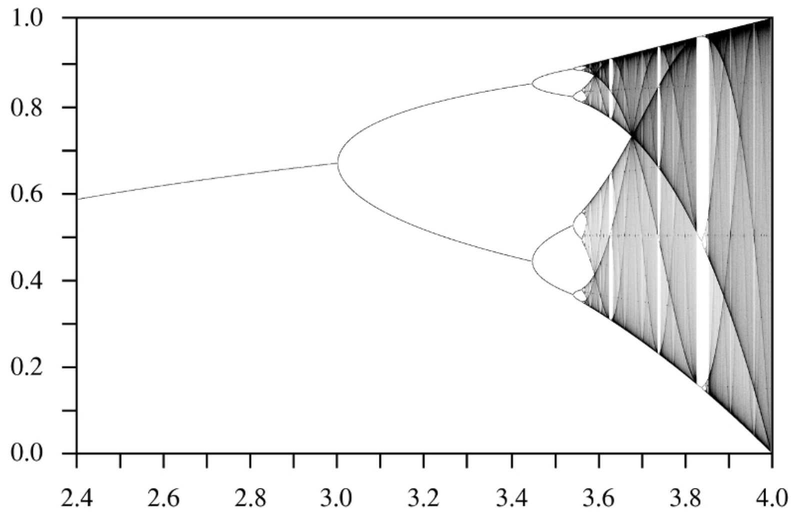


FIGURE 2.6 – *Le paramètre λ est en abscisse et on marque en ordonnée les points où une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ typique s'accumule. Pour $\lambda \leq 3$, toutes les suites convergent vers l'unique point fixe α. Mais ensuite, on voit apparaître un cycle de période 2, qui bifurque vers un cycle de période 4 et ainsi de suite en une cascade de bifurcation jusqu'au chaos pour $\lambda > 3{,}57$. A partir de là, il devient impossible de prévoir le comportement de la suite qui navigue de façon désordonnée dans une grande plage de valeurs.*

À connaître :

- Définition d'une suite et de sa limite.
- Savoir calculer une limite de suite simple avec les règles de la partie 3.
- Savoir faire des démonstrations élémentaires comme celles de la partie 3.
- Savoir utiliser les théorèmes de comparaison ainsi que le théorème 2.12.
- Définition et manipulation des suites extraites.

Utile pour la suite :

- Les formules de la partie 5 ne sont pas forcément à connaître par cœur pour ce cours, mais il faut savoir qu'elles existent et savoir les retrouver. De la même façon, les propositions de la partie 5.3 ne sont pas forcément à apprendre par cœur mais elles suivent des principes comme le théorème 2.12 qu'il faut savoir manipuler.
- La définition d'une suite de Cauchy et le théorème de Bolzano-Weierstrass.
- Les exemples, en particulier ceux de la partie 7, ne sont pas du cours à connaître par cœur. Mais ils peuvent être étudiés comme illustrations des méthodes et des théorèmes et vous le retrouverez sans doute dans la suite de vos études.