TD n^{o}7 : Bases Hilbertiennes

Exercice 1 : Espaces de Sobolev et séries de Fourier.

1) En admettant le théorème de Parseval-Bessel, montrer que la famille $(\sqrt{2}\sin(k\pi x))_{k\geq 1}$ est une base hilbertienne de $L^2(0,1)$.

Dans la suite, pour toute fonction $f \in L^2(]0,1[)$, on note $c_k(f)$ les coefficients tels que

$$f \;=\; \sum_{k\geq 1} c_k(f)\sin(k\pi .)$$

(on omet les facteurs $\sqrt{2}$ pour alléger, cela ne changera pas notre propos que la base soit normalisée ou pas). Pour tout $s \geq 0$, on pose

$$\mathbb{H}^s_D = \{ \; f \in L^2(]0,1[) \;, \; \sum_{k\geq 1} k^{2s}|c_k(f)|^2 < \infty \; \}$$

que l'on munit du produit scalaire

$$\langle f|g\rangle_{\mathbb{H}^s_D} = \sum_{k\geq 1} k^{2s} c_k(f)\bar{c}_k(g) \; .$$

2) Montrer que $\mathbb{H}^s_D(]0,1[)$ est un espace de Hilbert.
3) Montrer que si $s > s'$, alors $\mathbb{H}^s_D$ s'injecte de façon compacte dans $\mathbb{H}^{s'}_D$.
4) Montrer que pour tout $s > 1/2$, $\mathbb{H}^s_D$ s'injecte de façon compacte dans $\mathcal{C}^0([0,1])$ et que, pour tout $f \in \mathbb{H}^s_D$, $s > 1/2$, $f(0) = f(1) = 0$.
5) Soit $s \geq 1$ et soit $f \in \mathbb{H}^s_D$. Montrer que f est dérivable au sens des distributions et que sa dérivée f' appartient à $L^2(0,1)$ et est donnée par

$$f'(x) = \sum_{k\geq 1} k\pi c_k(f)\cos(k\pi x) \; .$$

6) En déduire que $\mathbb{H}^0_D = L^2(]0,1[)$, $\mathbb{H}^1_D = H^1_0(]0,1[)$ et que $\mathbb{H}^2_D \subset H^2(]0,1[) \cap H^1_0(]0,1[)$ (en fait, cette dernière inclusion est une égalité).

Exercice 2 : Equation de Laplace.

Soit $f \in L^2(]0,1[)$. On considère l'équation de Laplace

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial^2_{xx}u(x) = f(x) & x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \; . & \end{array} \right. \qquad (1)$$

En reprenant les notations de l'exercice 1 et en supposant connus les coefficients $c_k(f)$, donner une solution formelle u de (1). Dans quel sens s'agit-il d'une solution ? A-t-on unicité de cette solution ?

Exercice 3 : Equation de la chaleur.
On considère l'équation de la chaleur

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t u(x,t) = \partial^2_{xx} u(x,t) & (x,t) \in]0,1[\times\mathbb{R}^*_+ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in]0,1[\end{array}\right. \qquad (2)$$

En reprenant les notations de l'exercice 1, on suppose connus les coefficients $c_k(f)$.
1) Donner une solution formelle u de (2).
2) Montrer que cette solution est de classe $\mathcal{C}^\infty(]0,1[\times\mathbb{R}^*_+)$, vérifie l'équation d'évolution au sens de la dérivation classique et la donnée initiale au sens que $u(t) \to u_0$ dans $L^2(]0,1[)$ quand $t \to 0$.
3) A-t-on unicité de ce genre de solution ? (Indication : s'il y a deux solutions u et v, on pourra considérer $\partial_t(\|u(t) - v(t)\|^2_{L^2})$.)
4) Montrer que $\|u\|_\infty$ tend exponentiellement vite vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Exercice 4 : Un milieu hétérogène.
Soit $a \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $a(x) \geq \alpha$ sur $[0,1]$. On s'intéresse à l'équation

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_x(a(x)\partial_x u(x)) = f(x) & x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \ . & \end{array}\right. \qquad (3)$$

où f est une fonction connue.

1) Montrer que l'opérateur R défini par

$$(Rf)(x) = \int_0^x \frac{1}{a(\xi)} \left(\int_0^\xi f(s)ds \right) d\xi \ - \ \frac{\int_0^x \frac{dt}{a(t)}}{\int_0^1 \frac{dt}{a(t)}} \int_0^1 \frac{1}{a(\xi)} \left(\int_0^\xi f(s)ds \right) d\xi$$

envoie $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ sur une solution de (3) de classe $\mathcal{C}^2$.
2) Montrer que R est prolongeable en une application linéaire de $L^2(]0,1[)$ sur $L^2(]0,1[)$.
3) Montrer que R est auto-adjointe et compacte de $L^2(]0,1[)$ sur $L^2(]0,1[)$.
4) En déduire qu'il existe une base hilbertienne de fonctions propres $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour R. Proposer une méthode de résolution de (3) utilisant cette base.

Exercice 5 : Equation de Fredholm.
On considère l'opérateur A défini de $L^2(]0,1[)$ dans $L^2(]0,1[)$ par

$$Au(x) = \int_0^1 K(x,y)u(y)\,dy$$

avec $K \in L^2([0,1]^2)$ un noyau symétrique, c'est-à-dire vérifiant $K(x,y) = K(y,x)$.

1) Montrer que A est bien défini, linéaire et continu, sa norme triple étant majorée par $\sqrt{\int_0^1 \int_0^1 |K(x,y)|^2 dxdy}$.
2) Montrer que A est auto-adjoint.
3) Montrer que s'il existe des applications compactes $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que l'on ait $|||A - A_n||| \longrightarrow 0$, alors A est compact. Puis montrer que A est compact (on pourra utiliser des approximations A_n de rang fini).
4) En déduire que l'équation de Fredholm $u(x) = \int_0^1 K(x,y)u(y)\,dy \ + \ f(x)$, où $f \in L^2(]0,1[)$ est donnée, est une équation bien posée si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de A.