M1 | Université de Grenoble
Analyse fonctionnelle | 2014/2015

TD n^{o}2 : formes linéaires

Exercice 1 : Formes linéaires continues
Soit $(X, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.
1) Montrer qu'une forme linéaire f définie sur X est continue si et seulement si $\sup_{\|x\|=1} |f(x)|$ est fini.
2) Soit f une forme linéaire sur X, montrer que $x \mapsto \|x\| + |f(x)|$ est une norme sur X.
3) Montrer que la norme précédente est équivalente à la norme $\|\cdot\|$ si et seulement si f est continue sur X.

Exercice 2 : En dimension finie
Soit $(X, \|.\|)$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé de dimension finie et $\{e_1, \ldots, e_N\}$ une base de X. On peut donc associer à tout vecteur $x \in X$ ses (uniques) composantes $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_N(x) \in \mathbb{R}$ dans cette base :

$$x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x)\, e_i \ .$$

1) Montrer que $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |\lambda_i(x)|$ définit une norme sur X.
2) Montrer qu'il existe des constantes $C > c > 0$ telles que

$$c\|x\|_1 \leq \|x\| \leq C\|x\|_1 \ , \quad \text{pour tout } x \in X$$

(on pourra commencer par l'inégalité de droite et montrer par l'absurde l'inégalité de gauche). En déduire que toutes les normes sur X sont équivalentes.
3) Montrer que $(X, \|.\|)$ est un espace de Banach.
4) Montrer que toutes les formes linéaires sur X sont bornées et donc continues.

Exercice 3 : En dimension infinie

1) Donner un exemple de forme linéaire non-continue sur l'espace des polynômes muni de la norme $\|P\| = \int_0^1 |P(x)|\,dx$.

2) Montrer qu'il y a toujours des formes linéaires non bornées sur un espace vectoriel normé de dimension infinie (on se rappellera qu'il existe une base algébrique de taille infinie).

3) En déduire qu'un espace vectoriel est de dimension finie si et seulement si toutes ses normes sont équivalentes.

Exercice 4 : Continuité et noyau fermé

Soit X un espace de Banach réel et soit f une forme linéaire (pas forcément continue) sur X. On supposera dans toute la suite que f n'est pas identiquement nulle.

1) Soit $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) \neq 0$, montrer que $X = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathbb{R}x_0$.

2) Montrer que si Ker(f) n'est pas fermé, alors il est forcément dense dans X.

3) Supposons que f ne soit pas continue, montrer que son noyau n'est pas fermé. *Indication : on pourra considérer une suite (x_n) convergeant vers x telle que $f(x_n)$ ne tend pas vers $f(x)$. On montrera qu'on peut supposer que $f(x) \neq 0$ et que $f(x_n)$ converge vers $\ell \neq f(x)$. On considèrera alors $y_n = f(x_n)x - f(x)x_n$.*

4) En déduire l'alternative : soit f est continue et Ker(f) est fermé, soit f est discontinue et Ker(f) est dense.

5) Soit f une forme linéaire discontinue sur $\ell^1(\mathbb{N})$ et soit T l'application linéaire définie de $\ell^1(\mathbb{N})$ dans $\ell^1(\mathbb{N})$ par

$$T(x) = T(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (f(x), x_0, x_1, x_2, \ldots)\ .$$

Montrer que T est une application discontinue mais qui a un noyau fermé et non dense.