Institut Fourier
Université Grenoble I

L3 Méthodes Numériques
$2^{\text{ème}}$ semestre 2007/2008

Feuille d'exercices n° 5

Interpolation polynômiale.

Interpolation de Lagrange

Exercice 1 : Erreur d'interpolation
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$. Soient $a \leq x_1 < x_2 < ... < x_n \leq b$ des points de $[a,b]$ et soit P le polynôme d'interpolation de f associé aux n points x_i.
1) Soit $x \in [a,b]$, $x \neq x_i$. En utilisant le théorème de Rolle sur la fonction

$$h:\ t \longmapsto f(t) - P(t) - \frac{f(x)-P(x)}{\prod_{i=1}^n (x-x_i)} \prod_{i=1}^n (t-x_i)\ ,$$

montrer qu'il existe un point $\xi \in [a,b]$ tel que

$$f(x) - P(x) = \frac{(x-x_1)...(x-x_n)}{n!} f^{(n)}(\xi)\ .$$

2) En déduire que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)-P(x)| \leq \frac{C}{n!} \|f^{(n)}\|_\infty\ ,$$

avec $C = \sup_{x\in[a,b]} |(x-x_1)...(x-x_n)|$.

Exercice 2 : Meilleurs points d'interpolation et polynômes de Tchebychev
Notre but est de trouver les points x_1,...,x_n qui minimisent la quantité $C = \sup_{x\in[a,b]} |(x-x_0)...(x-x_n)|$. Quitte à appliquer une transformation affine, on peut supposer que $[a,b] = [-1,1]$.
Pour tout $x \in [-1,1]$, on pose $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.
1) Montrer que $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'on a la relation de récurrence $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$.

2) En déduire que T_n est un polynôme de degré n, que le monôme de plus haut degré est $2^{n-1}x^n$ et que les racines de T_n sont exactement les nombres $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$, $k = 1, ..., n$. T_n est appelé $n-$ième polynôme de Tchebychev.
3) Montrer que $|T_n|$ atteint son maximum sur $[-1, 1]$ aux points $x'_k = \cos\frac{k}{n}\pi$, $k = 0, ..., n$ et que $T_n(x'_k) = (-1)^k$.
4) On considère $\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) = (x - x_1)...(x - x_n)$. Montrer que $\tilde{T}_n$ minimise la quantité $\sup_{x\in[-1,1]} |Q(x)|$ parmi les polynômes Q de degré n dont le monôme de plus haut degré est x^n.
5) En déduire le meilleur choix de points pour l'interpolation de Lagrange sur $[-1, 1]$.

Exercice 3 : Forme de Newton
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. On note $P_{x_0,...,x_n}$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n + 1$ points x_0,...,x_n. On souhaite trouver les coefficients de $P_{x_0,...,x_n}$ dans la base $e^k_{x_0,...,x_n} = (X - x_0)...(X - x_{k-1})$, c'est-à-dire que l'on souhaite écrire $P_{x_0,...,x_n}$ sous la forme

$$P_{x_0,...,x_n} = \alpha^0_{x_0,...,x_n} + \alpha^1_{x_0,...,x_n}(X - x_0) + ... + \alpha^n_{x_0,...,x_n}(X - x_0)(X - x_1)...(X - x_{n-1}) \ .$$

1) Calculer les cefficients $\alpha^0_{x_0,...,x_n}$ et $\alpha^1_{x_0,...,x_n}$.
2) Montrer que le coefficient $\alpha^k_{x_0,...,x_n}$ ne dépend que de f et x_0,...,x_k.

Dorénavant, on notera $\alpha^k_{x_0,...,x_n} = f[x_0, ..., x_k]$.
NB : il s'agit de l'intérêt de la forme de Newton puisque le rajout de points de contrôle ne demande pas de recalculer tous les coefficients du polynôme d'interpolation.
3) Montrer que $f[x_0, ..., x_k]$ ne dépend pas de l'ordre des x_i.
4) Montrer que la formule suivante est vraie :

$$P_{x_0,...,x_n} = \frac{(X - x_0)P_{x_1,...,x_n} - (X - x_n)P_{x_0,...,x_{n-1}}}{x_n - x_0} \ .$$

En déduire que $f[x_0, ..., x_k]$, qui est appelée la différence divisée d'ordre k aux points $x_0, ..., x_k$, peut être calculée récursivement par

$$f[x_i] = f(x_i), \quad f[x_0, x_1, ..., x_k] = \frac{f[x_1, ..., x_k] - f[x_0, ..., x_{k-1}]}{x_k - x_0} \ .$$

Interpolation de Hermite

Exercice 4 : Soient x_1,...,x_n des points distincts d'un segment $[a, b]$. Soient y_1,...,y_n et d_1,...,d_n des valeurs réelles quelconques. On appelle polynôme d'interpolation de Hermite le polynôme H de degré inférieur ou égal à $2n-1$ qui vérifie

$$\forall i = 1, ..., n \quad H(x_i) = y_i \ \text{ et } \ H'(x_i) = d_i \ .$$

Si f est une fonction de $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, le polynôme d'interpolation de Hermite de f aux points x_i est le polynôme H relatif aux données $y_i = f(x_i)$ et $d_i = f'(x_i)$.
1) Montrer que l'application

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{2n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n} \\ P & \longmapsto & (P(x_1), ..., P(x_n), P'(x_1), ..., P'(x_n)) \end{array} \right)$$

est un isomorphisme. En déduire l'existence et l'unicité du polynôme de Hermite.
2) On pose $Q_j(x) = \prod_{k\neq j}(x-x_k)^2$. Montrer que le polynôme de Hermite est donné par

$$H(x) = \sum_{j=1}^{n} \left[\left(1 - (x-x_j)\frac{Q_j'(x_j)}{Q_j(x_j)} \right) y_j + (x-x_j)d_j \right] \frac{Q_j(x)}{Q_j(x_j)} \ .$$

3) Donner le polynôme de Hermite associé à la fonction sinus et aux points 0 et π. Dessiner sur $[0,\pi]$ l'allure des courbes du sinus, de son polynôme de Hermite et de son polynôme de Lagrange pour les points 0 et π.
4) On suppose que $f \in \mathcal{C}^{2n}([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - H(x)| \leq \frac{C}{(2n)!} \|f^{(2n)}\|_\infty \ ,$$

avec $C = \sup_{x\in[a,b]} |(x-x_1)^2 ... (x-x_n)^2|$. Quel est le meilleur choix de points x_i pour l'interpolation de Hermite ?

Courbes de Bézier

Exercice 5 : Les courbes de Bézier sont utilisées pour la réalisation de dessins sur ordinateur ainsi que dans le rendu des fontes de caractères. La courbe de Bézier associée à $n+1$ points $(M_k)_{k=0...n}$ de $\mathbb{R}^d$ est la courbe paramétrée décrite par

$$B : \left(\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ t & \longmapsto & \sum_{k=0}^n C_n^k M_k t^k (1-t)^{n-k} \end{array} \right) \ .$$

1) Donner la valeur de la courbe ainsi que son vecteur tangent pour $t=0$ et $t=1$.
2) Montrer que la courbe de Bézier est dans l'enveloppe convexe des points M_k.
3) Montrer que l'ensemble des courbes de Bézier est invariant par transformations affines.

4) Montrer que la famille de polynômes $(B_k^n)_{k=0,\ldots,n}$, avec $B_k^n = C_n^k X^k (1-X)^{n-k}$, est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire que :

a) une courbe de Bézier décrit un segment si et seulement si les points M_i sont alignés,

b) la restriction d'une courbe de Bézier est encore une courbe de Bézier,

c) tout arc de parabole est une courbe de Bézier définie par trois points.

TP Scilab :

Exercice 6 : Ecrire une fonction Scilab qui associe à n couples (x_i, f_i) le polynôme de Lagrange correspondant. Ecrire un programme qui interpole la fonction $f(x) = \frac{1}{1+10x^2}$ sur $[-1,1]$ avec des points x_i équirépartis sur $[-1,1]$ et avec les x_i correspondants aux zéros du $n-$ième polynôme de Tchebychev, puis qui trace les trois courbes et donne les erreurs commises par les deux interpolations.
On observera le phénomène de Runge : l'interpolation de Lagrange avec des points équirépartis est extrêmement mauvaise sur les bords de l'intervalle.

Exercice 7 : Ecrire un programme traçant la courbe de Bézier associée à n points de $\mathbb{R}^2$.