Institut Fourier
Université Grenoble I

L3 Méthodes Numériques
$2^{\text{ème}}$ semestre 2007/2008

Partiel

Durée 2h
Documents, téléphones portables et calculatrices interdits

Exercice n°1 : méthode de la *regula falsi*.
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. On suppose que $f(a)f(b)<0$. On cherche un zéro de f sur $[a,b]$. Pour cela, on utilise la méthode de la *regula falsi*, ou "fausse position". Soient $a_0=a$ et $b_0=b$, on construit des suites (a_k), (b_k) et (c_k) comme suit.

$$c_k = b_k - \frac{b_k-a_k}{f(b_k)-f(a_k)} f(b_k) \ , \tag{1}$$

- si $f(c_k)=0$ alors c_k est le zéro voulu et on s'arrête,
- si $f(a_k)f(c_k)<0$, alors $a_{k+1}=a_k$ et $b_{k+1}=c_k$,
- si $f(a_k)f(c_k)>0$, alors $a_{k+1}=c_k$ et $b_{k+1}=b_k$.

Montrer que $c_k \in]a_k,b_k[$ pour tout k et interpréter graphiquement l'algorithme en terme de sécantes.

Exercice n°2 : interpolation polynômiale.
Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré au plus 3. Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ une fonction dérivable. On cherche un polynôme $P\in\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant

$$P(-1)=f(-1) \ , \quad P(0)=f(0) \ , \quad P'(0)=f'(0) \quad \text{et} \quad P(1)=f(1) \ . \tag{2}$$

1) En considérant l'application $\Phi : P\in\mathbb{R}_3[X] \mapsto (P(-1),P(0),P'(0),P(1))$, montrer qu'il existe un unique polynôme $P\in\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant (2).
2) Montrer que si f est paire (resp. impaire), alors P est pair (resp. impair).
3) Donner les polynômes P correspondant aux fonctions $f_1(x)=x^2-3x+5$ et $f_2(x)=\cos(\pi x)$.

Exercice n°3 : résolution de systèmes linéaires.
On munit $\mathbb{R}^d$ du produit scalaire usuel que l'on note $<.|.>$. On note $\|.\|$ la norme associée. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ supposée symétrique et définie positive et soit b un vecteur de $\mathbb{R}^d$. On cherche à résoudre le système $Ax=b$.

Une méthode exacte :

1) Montrer que l'application $(x,y) \in \left(\mathbb{R}^d\right)^2 \longmapsto < Ax|y >$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$. Quelle est la norme associée ? En déduire qu'il existe M et $\eta > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad M\|x\|^2 \ \geq \ < Ax|x > \ \geq \ \eta\|x\|^2 \ . \tag{3}$$

2) Montrer que l'on peut trouver une base $(v_1, v_2, ..., v_d)$ de $\mathbb{R}^d$ telle que

$$\forall i = 1, ..., d \ , \quad < Av_i|v_i >= 1 \qquad \text{et si } j \neq i \quad < Av_j|v_i >= 0 \ .$$

On donnera une façon explicite de construire une telle base.

3) Montrer que l'unique solution x_* de $Ax = b$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^d < b|v_i > v_i$.

4) Cette méthode de résolution exacte est-elle sensible aux erreurs d'approximation lors des calculs ?

Une méthode approchée :

Pour obtenir une méthode plus robuste, on implémente plutôt une méthode itérative. On cherche à minimiser la fonctionnelle

$$J : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \qquad J(x) = \frac{1}{2} < Ax|x > - < b|x > \ .$$

1) Calculer le gradient de J en $x \in \mathbb{R}^d$. On rappelle que le gradient $\overrightarrow{\nabla} J(x)$ est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^d$ tel qu'il existe h avec $\|h(y)\| \to 0$ quand $y \to 0$ vérifiant

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \quad J(x+y) = J(x) + < \overrightarrow{\nabla} J(x)|y > + \|y\| h(y) \ .$$

2) Soit x_* l'unique solution de $Ax = b$. En utilisant (3), montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$, $J(x_* + y) > J(x_*)$. En déduire que la fonction J possède un unique minimum atteint en x_* et que x_* est le seul point où $\overrightarrow{\nabla} J$ s'annule.

On propose l'algorithme suivant. On part de $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et on construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante. Si x_n est connu, on regarde la droite passant par x_n et dirigée selon la plus forte pente c'est-à-dire selon $\overrightarrow{\nabla} J(x_n)$ et on prend x_{n+1} réalisant le minimum de J sur cette droite. Plus précisemment

$$x_{n+1} = x_n + t\overrightarrow{\nabla} J(x_n) \qquad \text{où } t \text{ vérifie } J\left(x_n + t\overrightarrow{\nabla} J(x_n)\right) = \min_{s\in\mathbb{R}} J\left(x_n + s\overrightarrow{\nabla} J(x_n)\right) \ .$$

3) Montrer que l'algorithme définit bien une unique suite et que l'on a

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\|y_n\|^2}{< Ay_n|y_n >} y_n \quad \text{avec } y_n = Ax_n - b \ .$$

4) On cherche à montrer que cet algorithme converge.

a) Montrer que $(J(x_n))$ est une suite décroissante et convergente.

b) Montrer que

$$J(x_{n+1}) = J(x_n) - \frac{1}{2} \frac{\|y_n\|^4}{< Ay_n|y_n >} \ .$$

En déduire que (y_n) tend vers 0 et que (x_n) tend vers x_*.