Institut Fourier
Université Grenoble I

L3 Méthodes Numériques
$2^{\text{ème}}$ semestre 2007/2008

Simulation des équations différentielles ordinaires

On souhaite intégrer numériquement l'équation différentielle

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad , \quad y(0) = \tilde{y} \ .$$

Pour cela, on se fixe un pas de temps h et on va calculer une approximation des vecteurs $y_n = y(nh)$ pour $n \in \mathbb{N}$. On pose bien sûr $y_0 = \tilde{y}$, puis on calcule successivement les y_n par la méthode choisie, par exemple :

Euler explicite : $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$.

Euler implicite : $y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$, nécessite une résolution d'une équation non-linéaire (par exemple par la méthode de Newton).

Point milieu : $\begin{cases} y_{mil} = y_n + h/2 * f(t_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_n + h/2, y_{mil}) \end{cases}$

Runge-Kutta 4 : $\begin{cases} p_1 = f(t_n, y_n) & & \\ t_2 = t_n + h/2 & y_2 = y_n + h/2 * p_1 & p_2 = f(t_2, y_2) \\ t_3 = t_n + h/2 & y_3 = y_n + h/2 * p_2 & p_3 = f(t_3, y_3) \\ t_4 = t_n + h = t_{n+1} & y_4 = y_n + h * p_3 & p_4 = f(t_4, y_4) \\ y_{n+1} = y_n + h * \big(\frac{1}{6}p_1 & + \frac{2}{6}p_2 + \frac{2}{6}p_3 + \frac{1}{6}p_4\big) & \end{cases}$

N.B. 1 : si on simule une équation différentielle d'ordre k sur $\mathbb{R}^d$, il faut bien sûr la mettre d'abord sous forme d'une équation différentielle d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^{dk}$.
N.B. 2 : on notera que $y_{n+1} \approx y_n + \int_{nh}^{(n+1)h} f(y(t))dt$. Il y a donc un lien entre ces méthodes et l'intégration numérique. Par exemple, les méthodes d'Euler explicite et implicite correspondent respectivement aux méthodes des rectangles à gauche et à droite.

Avertissement : pour les projets, on pourra utiliser la commande `ode` de Scilab, mais il faudra impérativement programmer au moins une des méthodes précédentes de façon explicite.