[7], [11], [8],[2],[9],[6] ,[10],[12],[1],[3],[5], [13],

École d'été de mathématiques: Géométrie analytique et D-modules Cours de géométrie différentielle et symplectique.

Bernard Parisse (Institut Fourier)

19-22 Juin 1995

Table des matières

1 Variétés, espaces tangent et cotangent.

1.1 Variété.

Une variété est un objet où l'on souhaite pouvoir faire les mêmes calculs différentiels que dans $\mathbb{R}^n$. Pour calculer une dérivée, il suffit de connaître la fonction dans un voisinage du point considéré, donc on va demander à une variété d'avoir une structure *locale* semblable à $\mathbb{R}^n$. Par exemple, sur la figure 1, p. 2, on observe que la courbe de gauche se recoupe en M donc ce n'est pas une variété: en effet, on ne peut pas ramener un voisinage du point double à un intervalle de $\mathbb{R}$. Par contre la courbe de droite est une variété.

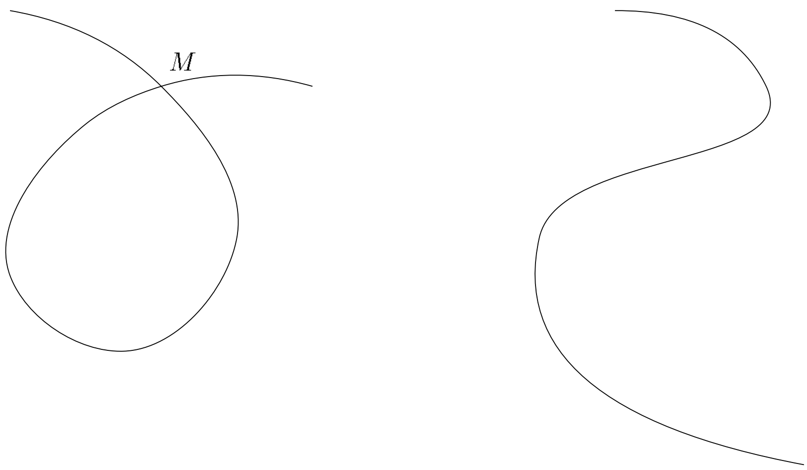

Figure 1: A gauche: ce n'est pas une variété, à droite, c'est une variété.

1.1.1 Définition.

Définition 1 *On dira qu'un espace topologique M est une variété (C^∞) de dimension n s'il existe un atlas de M, i.e. un recouvrement de M par des ouverts O_α sur lesquels sont définies des cartes locales permettant d'identifier O_α à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec compatibilité (C^∞) entre cartes locales, c'est-à-dire qu'il existe des applications ψ_α telles que:*

1. *$M \subset \cup O_\alpha$ (les O_α recouvrent M),*
2. *$\psi_\alpha : O_\alpha \to U_\alpha$ est un homéomorphisme de O_α sur un ouvert U_α de $\mathbb{R}^n$,*
3. *Si $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$, alors $(\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1})_{|\psi_\alpha(O_\alpha \cap O_\beta)}$ est un difféomorphisme C^∞ sur $\psi_\beta(O_\alpha \cap O_\beta)$ (ce qui a bien un sens car $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ est définie d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans un autre ouvert de $\mathbb{R}^n$).*

En toute rigueur, on ne devrait pas donner le nom de variété à M mais à $(M, (\psi_\alpha), n)$. C'est pourtant ce qui sera toujours fait.

Exemples:

1. $\mathbb{R}^n$ est une variété de dimension n, avec comme atlas l'application identité définie sur l'ouvert $O = \mathbb{R}^n$.
2. $S^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ le cercle est une variété de dimension 1, avec comme atlas $O_0 = \{\theta \neq 0[2\pi]\}$ et $O_\pi = \{\theta \neq \pi[2\pi]\}$, les applications ψ_α consistant à prendre la détermination de l'angle respectivement dans les intervalles $]0, 2\pi[$ et $]-\pi, \pi[$. Le changement de carte est une application affine, donc C^∞.

3. le tore $\Pi^2 = I\!R^2/Z\!\!Z^2$ est une variété de dimension 2, avec par exemple comme atlas:

$$\begin{array}{ll} O_{--} = \{(x,y)/x \neq 0[1], y \neq 0[1]\} & O_{-+} = \{(x,y)/x \neq 0[1], y \neq 0.5[1]\} \\ O_{+-} = \{(x,y)/x \neq 0.5[1], y \neq 0[1]\} & O_{++} = \{(x,y)/x \neq 0.5[1], y \neq 0.5[1]\} \end{array}$$

les applications ψ consistant à prendre le représentant de la classe d'équivalence de (x,y) respectivement dans les intervalles

$$]0,1[\times]0,1[,\quad]0,1[\times]0.5,1.5[,\quad]0.5,1.5[\times]0,1[,\quad]0.5,1.5[\times]0.5,1.5[$$

4. La sphère $S^2 = \{x = (x^1,x^2,x^3) \in I\!R^3, ||x||^2 = 1\}$ est une variété de dimension 2. On prend par exemple comme atlas les 6 ouverts $O_i^\pm = \{x \in S^2, \pm x^i > 0\}$ qui recouvrent S^2 puisque $||x||^2 = 1$ entraîne que l'une au moins des coordonnées x_i de x soit non nulle, et on définit les homéomorphismes $\psi_i^\pm$ par:

$$\begin{array}{rcl} \psi_i^\pm : \quad x & \to & (\ldots,\hat{x}_i,\ldots) \\ O_i^\pm & \to & \{(x,y) \in I\!R^2/x^2+y^2 < 1\} \end{array}$$

c'est-à-dire que l'on enlève la i-ième coordonnée de x. Montrons par exemple que les cartes ψ_3^+ et ψ_2^- sont compatibles sur

$$O_3^+ \cap O_2^- = \{x \in I\!R^3/||x|| = 1, x_3 > 0, x_2 < 0\}$$

On a ici $\psi_3^+(x) = (x_1,x_2)$ et $\psi_2^-(x) = (x_1,x_3)$ donc:

$$(\psi_2^-)^{-1}(x,y) = (x, -\sqrt{1-x^2-y^2}, y)$$

et:

$$\psi_3^+ \circ (\psi_2^-)^{-1}(x,y) = (x, -\sqrt{1-x^2-y^2})$$

avec rappelons-le $x^2+y^2 < 1$. Donc $\psi_3^+ \circ (\psi_2^-)^{-1}$ est un difféomorphisme C^∞ de

$$\psi_2^-(S^2 \cap \{x_2 < 0, x_3 > 0\}) = \{(x,y)/x^2+y^2 < 1\}$$

sur

$$\psi_3^+(S^2 \cap \{x_2 < 0, x_3 > 0\}) = \{(x,y)/x^2+y^2 < 1\}.$$

5. $I\!P^n = \{$ directions de $I\!R^{n+1} = I\!R^{n+1}/I\!R^*\}$, c'est-à-dire le quotient du groupe additif $I\!R^{n+1}$ par l'opération de multiplication par un scalaire, est une variété de dimension n. On prend les $n+1$ ouverts $O_k = \{[x_0,\ldots.,x_n]/x_k \neq 0\}$ $(0 \leq k \leq n)$, où $[x_0,\ldots,x_n]$ désigne la classe d'équivalence c'est-à-dire la direction de $(x_0,\ldots,x_n)$, et les cartes

$$\psi_k : [x_0,\ldots,x_n] \to (\frac{x_1}{x_k},\ldots,\frac{x_{k-1}}{x_k},\frac{x_{k+1}}{x_k},\ldots,\frac{x_n}{x_k})$$

Exercice: vérifier que les cartes locales sont compatibles!

Remarque: $I\!P^1$, l'ensemble des droites du plan, s'identifie au cercle S^1, il suffit de multiplier les angles par 2. Par contre $I\!P^2$ ne s'identifie pas à S^2, on peut voir $I\!P^2$ comme un hémisphère dont on identifie les points diamétralement opposés sur l'équateur.

1.1.2 Applications C^∞.

On peut étendre la notion d'applications C^∞ à des variétés en regardant si l'application vue en cartes locales est C^∞.

Définition 2 *Soient M et N deux variétés de dimension m et n, munis d'atlas respectifs ϕ_α et ψ_β.*

Une application f de M dans N est dite C^∞ si et seulement si les applications $\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$ sont C^∞ lorsqu'elles ont un sens (rappelons que ces applications sont définies d'un ouvert de $I\!R^m$ dans un ouvert de $I\!R^n$).

Une bijection f entre M et N est un difféomorphisme C^∞ si f et f^{-1} sont des applications C^∞. En particulier, s'il existe un difféomorphisme entre M et N alors $m = n$.

On note $C^\infty(M,N)$ l'ensemble des applications C^∞ de M à valeur dans N.

Si l'application identité est un difféomorphisme de M muni d'un atlas (ϕ_α) sur lui-même muni d'un autre atlas (ψ_β), les structures de variétés de M induites par les atlas ϕ et ψ sont identiques (au sens que par exemple les applications C^∞ de variété de départ ou d'arrivée M sont indépendantes du choix de l'un ou de l'autre atlas). Ce qui justifie l'omission de l'atlas lorsqu'on parle d'une variété.

Remarque 3 *On peut définir de même des structures de variété C^k ou analytiques.*

Exemple

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} S^2 & \rightarrow & P^2 \\ x & \rightarrow & [x] \end{array} \right.$$

est C^∞, localement inversible, mais pas globalement inversible (puisque deux points diamétralement opposés de la sphère définissent la même direction). Par exemple, on a:

$$\psi_2 \circ f \circ (\varphi_1^+)^{-1}(x,y) = \psi_2(f(\sqrt{1-x^2-y^2}, x, y)) = (\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{x}, \frac{y}{x})$$

qui est bien C^∞ sur $x^2+y^2<1, x \neq 0$.

Exercice Montrer que l'ensemble des matrices inversibles $GL_n(I\!R)$ est une variété. Soit A une matrice $n \times n$ et:

$$f_A : G \rightarrow f_A(G) = G^{-1}AG$$

montrer que f_A est C^∞ de $GL_n(I\!R)$ dans $M_n(I\!R)$.

Remarque 4 *On peut définir la notion d'atlas maximal, il s'agit de l'ensemble de toutes les cartes locales qui sont C^∞-compatibles.*

1.1.3 Sous-variétés.

Définition 5 *Soit M une variété de dimension n. On dit que N est une sous-variété de M si on peut choisir un atlas ψ de M tel que pour tout ouvert O_i source de ψ_i, l'image de $N \cap O_i$ par ψ_i soit l'intersection d'un sous-espace affine de $I\!R^n$ avec $\psi_i(O_i) = U_i$.*

Exemples:

- Tout ouvert d'une variété M est une sous-variété de M.
- la sphère S^n est une sous-variété de $I\!R^{n+1}$. On prend comme carte locale de $I\!R^{n+1}$ sur l'ouvert:

  $$O_i^\pm = \{\pm x_i > 0, \sum_{j\neq i} x_j^2 < 1\}$$

  la fonction:

  $$\psi_i^\pm(x) = (x_1, ..., x_{i-1}, x_i \mp \sqrt{1 - \sum_{j \neq i} x_j^2}, x_{i+1}, ..., x_n)$$

  et sur $O_0 = \{||x||^2 \neq 1\}$ on prend la carte identité. On recouvre bien $I\!R^{n+1}$ et l'image par $\psi_i^\pm$ de $O_i^\pm \cap S^n$ est:

  $$(I\!R \times ... \times I\!R \times \{0\} \times I\!R \times ... \times I\!R) \cap \psi_i^\pm(O_i^\pm)$$

Remarque 6 *La dimension de l'espace affine est indépendante du point de la sous-variété considéré, elle dépend uniquement de la composante connexe. En effet, la dimension est localement constante, car si on change de carte locale, les deux cartes locales permettent d'obtenir un difféomorphisme entre deux espaces affines qui ont donc même dimension. Donc une sous-variété d'une variété est une variété de dimension la dimension de l'espace affine.*

Si on se donne deux variétés M et M' de dimensions m et m', le produit cartésien $M \times M'$ est encore une variété de dimension $m+m'$.

On peut ainsi construire de nombreux exemples de variétés. Un énoncé permet de justifier la structure C^∞ de variétés de base:

Théorème 7 *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^∞ et de rang constant. Alors $X_b = f^{-1}(b)$ est soit vide soit une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.*

Si f est de plus ouverte sur son image, alors l'image $f(U)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^p$.

Par exemple, le cercle est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque de 1 par:

$$f : (\mathbb{R}^2)^* \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 + y^2$$

Par contre, le dessin à gauche de la figure 1 n'est pas une ligne de niveau d'une fonction de rang constant car $df = 0$ au point double.

Un théorème dû à Whitney affirme en outre que toute variété de dimension n peut être vue comme une sous-variété de $\mathbb{R}^{2n+1}$.

1.2 Espace tangent

On va donner une définition abstraite de l'espace tangent à une variété en commençant par voir les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ comme des directions de dérivation de fonctions de $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (C^∞ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$).

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ dans un voisinage de $m \in \mathbb{R}^n$ et soit $v \in \mathbb{R}^n$ un vecteur, on leur associe la dérivée de f selon v en m:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(m+tv) - f(m)}{t} = v(f)$$

en coordonnées locales:

$$v(f) = \sum_{k=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(m)$$

On peut voir l'action de v comme étant une fonctionnelle (que l'on note encore v) de f, qui vérifie les propriétés de linéarité et de Leibniz:

$$v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g) \tag{1}$$

$$v(fg) = f(m)v(g) + g(m)v(f) \tag{2}$$

Réciproquement, si une fonctionnelle ϕ vérifie les propriétés (1) et (2), alors montrons que ϕ est identique à l'action d'un vecteur v.

On observe d'abord que $\phi(1^2) = 2\phi(1)$ donc $\phi(1) = 0$ puis par linéarité $\phi(\text{constante}) = 0$. Soit maintenant $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ dans un voisinage $O = B(m, \varepsilon)$ de $m \in \mathbb{R}^n$, posons pour $\tilde{m} \in O$:

$$g(t) = f(m + t(\tilde{m} - m))$$

La fonction g est C^∞ sur $[0,1]$, donc

$$\begin{aligned} f(\tilde{m}) = g(1) &= g(0) + \int_0^1 g'(t)dt \\ &= f(m) + \sum_{i=1}^{n} (\tilde{m} - m)_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(m + t(\tilde{m} - m))dt \end{aligned}$$

Donc, par linéarité et en appliquant Leibniz:

$$\phi(f) = \sum_{k=1}^{n} \phi((\tilde{m} - m)_i) \{ \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(m + t(\tilde{m} - m))dt \}_{|\tilde{m}=m}$$

Finalement:

$$\phi(f)(m) = \sum_{k=1}^{n} \phi(\tilde{m}_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(m) = v(f),$$

où v a pour coordonnées $\phi(m_i)$ dans la base canonique.

Notation:

On note $\frac{\partial}{\partial x_i}$ le i-ième vecteur de la base canonique. Ce qui se justifie par le fait que

$$v = \sum_{k=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \Rightarrow v(f) = \sum_{k=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Revenons maintenant au cas d'une variété quelconque. On note $C^\infty(m, I\!R)$ l'ensemble des fonctions qui sont C^∞ sur un voisinage de m.

Définition 8 *L'espace tangent T_mM en un point m de M est l'ensemble des applications ϕ de $C^\infty(m, I\!R)$ à valeurs dans $I\!R$ vérifiant les règles de linéarité et de Leibniz (1) et (2).*

Proposition 9 *T_mM est un espace vectoriel de dimension $n = \dim M$. De plus $TM = \cup_{m\in M}\{m\} \times T_mM$, l'espace tangent, est muni canoniquement d'une structure de variété de dimension $2n$.*

Preuve:

On définit la structure d'espace vectoriel sur T_mM par la somme de fonctionnelles et le produit d'une fonctionnelle par un scalaire. Considérons un ouvert O de M contenant m, source de la carte locale x à valeur dans l'ouvert U de $I\!R^n$. A tout couple (m, v) de TM, on associe:

$$Tx(m, v) = (x(m), x_*(v)), \quad \text{où } x_*(v) : \left\{ \begin{array}{ccc} C^\infty(x(m), I\!R) & \rightarrow & I\!R \\ f & \rightarrow & x_*(v)(f) = v(f \circ x) \end{array} \right.$$

On observe tout d'abord que x_* est un automorphisme entre T_mM et l'espace vectoriel $I\!R^n$ (en utilisant l'identification des vecteurs de $I\!R^n$ avec les fonctionnelles vérifiant (1) et (2)). Donc $\dim T_mM = n$. A la carte x est associée canoniquement une base de T_mM dont le i-ième vecteur est $x_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i})$. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on note encore cette base $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Ceci est justifié par le fait que pour les fonctions $m \rightarrow x_i(m)$ la valeur de $v(x_i)$ est $v_i = \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial}{\partial x_k} x_i$. D'ailleurs on peut voir Tx en coordonnées par:

$$Tx : (m, v) \rightarrow (x(m); v(x_1), ..., v(x_n))$$

On considère maintenant deux cartes locales x et y, montrons que Tx et Ty sont compatibles. On se donne donc (x_m, α) dans l'image de Tx et on calcule $Ty \circ Tx^{-1}(x_m, \alpha) = (y_m, \beta)$. Notons $(m, v) = (Tx)^{-1}(x_m, \alpha)$, donc $m = x^{-1}(x_m)$ et:

$$Ty \circ Tx^{-1}(x_m, \alpha) = ((y \circ x^{-1})(x_m), v(y_1), ..., v(y_n))$$

Comme M est une variété, il est clair que $y \circ x^{-1}$ est C^∞ en x_m. Il reste à exprimer les $\beta_k = v(y_k)$ en fonction des $\alpha_i = v(x_i)$. Pour $\tilde{m} \in M$ voisin de m d'image $x_{\tilde{m}}$ par la carte locale x, on a:

$$y_k(\tilde{m}) - y_k(m) = (y \circ x^{-1})_k(x_{\tilde{m}}) - (y \circ x^{-1})_k(x_m) = \sum_{i=1}^{n} (x_{\tilde{m}} - x_m)_i \int_0^1 \frac{\partial (y \circ x^{-1})_k}{\partial x_i}((1-t)x_m + t x_{\tilde{m}})\, dt$$

Donc:

$$\beta_k = v(y_k) = \sum_{i=1}^{n} v(x_i) \frac{\partial (y \circ x^{-1})_k}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \alpha_i$$

Finalement $\beta_k = v(y_k)$ est une combinaison linéaire à coefficients C^∞ des α_i, la matrice de l'application linéaire qui permet de passer du vecteur α au vecteur β est la matrice:

$$\frac{Dy}{Dx} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right)_{ik} \tag{3}$$

qui est inversible car $x \rightarrow y(x)$ est un difféomorphisme C^∞.

Si v a pour coordonnées α dans la base $\partial/\partial x_j$ et β dans la base $\partial/\partial y_j$, α et β sont reliés par la formule (3) donc en faisant $\alpha = (0, .., 0, 1, 0, ..., 0)$ (i.e. $\alpha_i = \delta_{ij}$ pour $i \in [1, n]$), on obtient:

$$\beta_k = \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_k} \tag{4}$$

Remarque 10 *On peut également voir un vecteur comme la dérivée d'une courbe sur M en un point m de M. La structure d'espace vectoriel est alors moins naturelle.*

Soit M une sous-variété de N. Alors TM est canoniquement une sous-variété de TN, en effet si $v \in T_m M$, on peut le voir comme un vecteur de $T_m N$ en définissant son action sur $f \in C^\infty(m \in N, \mathbb{R})$ par restriction: $v(f_{|M})$. Si x est une carte locale de N dans laquelle M a pour équation $x_1 = \ldots = x_k = 0$ alors Tx est une carte locale de TN dans laquelle TM a pour équations $x_1 = \ldots = x_k = v_1 = \ldots = v_k = 0$ où (v_k) désigne les coordonnées de v dans la base $(\partial/\partial x_k)$.

Exemples:

Considérons S^2 et un point $(x, y, z) \in S^2$ situé dans la source de la carte locale:

$$\varphi_1^+ : \quad (x, y, z) \ \to \ (x - \sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z)$$

Soit v un vecteur de $T_{(x,y,z)}\mathbb{R}^3$, alors $v \in T_{(x,y,z)}S^2$ si $v(x - \sqrt{1 - y^2 - z^2}) = 0$ donc si:

$$v_x + v_y \frac{y}{\sqrt{1 - y^2 - z^2}} + v_z \frac{z}{\sqrt{1 - y^2 - z^2}} = 0$$

où (v_x, v_y, v_z) désignent les coordonnées de v dans la base canonique $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$. Finalement $v \in T_{(x,y,z)}M$ si:

$$x v_x + y v_y + z v_z = 0$$

que l'on peut réécrire sous la forme:

$$df(v) = 0$$

où $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ est la fonction de rang constant au voisinage de S^2, telle que $S^2 = f^{-1}(1)$.

Ce fait est d'ailleurs général, si f est une application comme au théorème 7, et si $m \in f^{-1}(b)$ alors $T_m f^{-1}(b) = \mathrm{Ker} d_m f$ (*cf.* [4, (16.8.8), p.42]).

Les groupes classiques de matrices (inversibles, orthogonales, unitaires) ont des structures de variété, ce sont d'ailleurs des sous-variétés de $\mathbb{R}^{n^2}$. Les espaces tangents en l'identité sont alors respectivement toutes les matrices, les matrices antisymétriques et les matrices antihermitiennes. La structure de groupe permet d'identifier les espaces tangents en d'autres matrices avec ces espaces vectoriels de matrices.

Définition 11 *Soient X et Y deux variétés, soit $f : X \to Y$ une application C^∞ dans un voisinage de $x \in X$ et soit $y = f(x) \in Y$. On définit $T_x f : T_x X \to T_y Y$ en posant pour $v \in T_x X$ et $g \in C^\infty(y, \mathbb{R})$: $(T_x f(v))\ (g) = v(g \circ f)$. On vérifie aisément que $T_x f(v) \in T_y Y$.*

Proposition 12 *$T_x f$ est une application linéaire de $T_x X$ dans $T_y Y$. Lorsque f est C^∞ de $X \to Y$, on peut définir l'application tangente $Tf : TX \to TY$ par:*

$$Tf : \quad (x, v) \in TX \quad \to \quad (f(x), T_x f(v)) \in TY$$

La linéarité est évidente et le caractère C^∞ se montre en coordonnées locales.

Exemple:

L'application f_A définie sur $GL_n(\mathbb{R})$ par $f_A(G) = G^{-1}AG$ admet pour application tangente en G:

$$T_G f_A(M) = G^{-1}AM - G^{-1}MG^{-1}AG$$

Définition 13 *Lorsque $Y = \mathbb{R}$ c'est-à-dire lorsque $f : X \to \mathbb{R}$, Tf se note df et est appelée différentielle de f.*

1.3 Espace cotangent.

Soit $m \in M$. On définit l'espace cotangent en m à M:

$$T_m^* M = \{d_m f, f \in C^\infty(m, \mathbb{R})\}$$

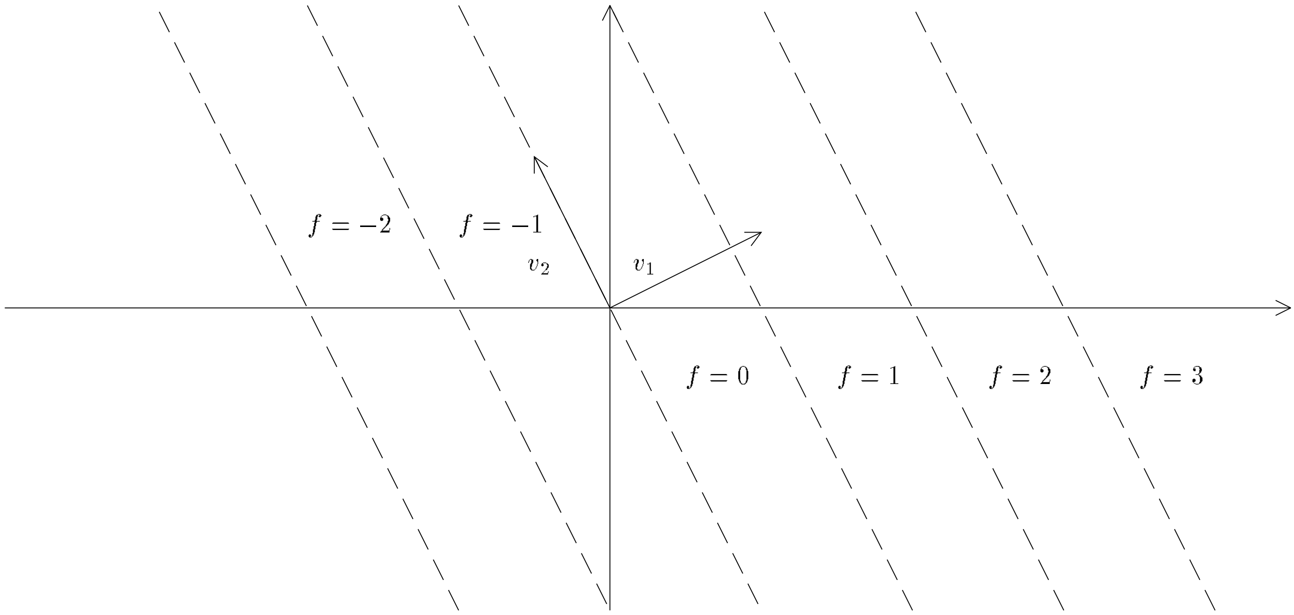

Figure 2: Représentation d'une 1-forme dans $I\!R^2$.

c'est également le dual de T_mM car toute forme linéaire de T_mM est la différentielle d'une fonction $C^\infty(m, I\!R)$ (il suffit de le montrer en coordonnées locales, et dans le cas d'un ouvert de $I\!R^n$, il suffit de prendre pour f la forme linéaire elle-même).

On représente la forme linéaire par ses lignes de niveaux (*cf.* figure 2, 8). La valeur de la forme linéaire sur un vecteur se calcule en regardant à quelle courbe de niveau appartient l'extrémité du vecteur. Ici $f(v_2) = 0$ et $f(v_1) \approx 1.2$.

Proposition 14 *T_m^*M, est un espace vectoriel de dimension n =dim$M$. De plus $T^*M = \cup_{m\in M}\{m\}\times T_m^*M$, le cotangent de M, est muni canoniquement d'une structure de variété de dimension $2n$.*

Preuve:
Soit O un ouvert de M contenant m, source de la carte locale x à valeurs dans l'ouvert $U \subset I\!R^n$. On en déduit une carte locale dite carte naturelle de T^*M définie sur $\cup_{m\in O}\{m\} \times T_m^*M$:

$$T^*x : \quad (m, d_mf) \in T^*M \quad \rightarrow \quad (x(m), d_mf(\frac{\partial}{\partial x_1}), ..., d_mf(\frac{\partial}{\partial x_n})) = (x(m), d_{x(m)}(f \circ x^{-1}))$$

Il reste à vérifier que deux cartes naturelles sont C^∞ compatibles sur leur domaine commun de définition. Soit donc y une autre carte de M et déterminons $T^*y \circ (T^*x)^{-1}$. Soit $(x(m), \alpha) \in I\!R^{2n}$, (m, d_mf) son image réciproque par T^*x, et $(y(m), \beta)$ l'image de (m, d_mf) par T^*y. On a:

$$y(m) = (y \circ x^{-1})(x(m)), \quad \beta = (d_mf(\frac{\partial}{\partial y_1}), ..., d_mf(\frac{\partial}{\partial y_n}))$$

Comme les cartes x et y sont compatibles, $y \circ x^{-1}$ est C^∞. Il reste à exprimer β de manière C^∞ en fonction de α et de $x(m)$. Pour cela, on utilise la linéarité de d_mf et le changement de carte pour un vecteur tangent (4):

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

d'où l'on tire:

$$\beta_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_k}\alpha_k$$

ou encore:

$$\beta = {}^t\left(\frac{Dy}{Dx}\right)^{-1}(x)\alpha$$

qui est bien une fonction C^∞ de α et de m.

Remarque 15 *La base duale de $\partial/\partial x_i$ sera notée dx_i. On a alors:*

$$d_m f = \sum_{i=1}^{n} d_m f(\frac{\partial}{\partial x_i})dx_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \tag{5}$$

où on a défini la dérivée partielle de f par:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = d_m f(\frac{\partial}{\partial x_i})$$

1.4 Dualité tangent-cotangent.

Par définition de *df* on a $d_x f(v) = v(f)$ qui définit la dualité entre TM et T^*M. Graphiquement (*cf.* figure 3, p. 9), on obtient la base duale de $\{v_1, v_2\}$ de la façon suivante: on construit le réseau de base $\{v_1, v_2\}$, on prend les deux formes linéaires $\{f_1, f_2\}$ dont les lignes de niveau entières sont le réseau.

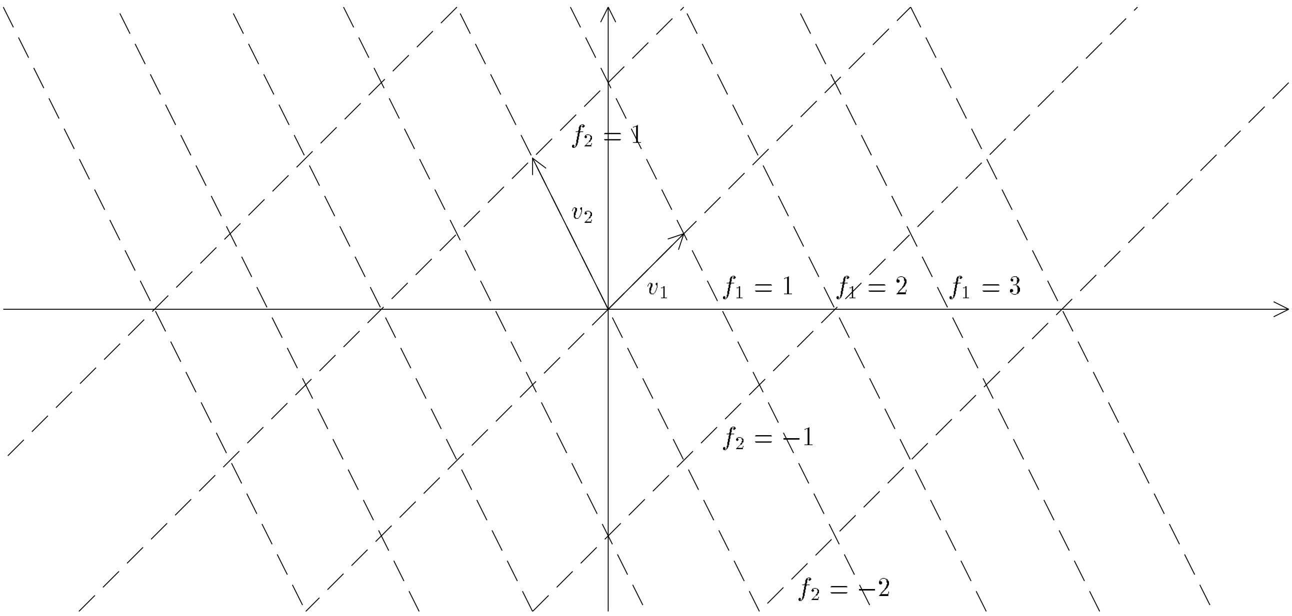

Figure 3: Une base de vecteurs et sa base duale.

En général, il n'y a pas d'isomorphisme canonique entre TX et T^*X. Il est nécessaire de disposer d'une donnée supplémentaire qui est une forme bilinéaire non dégénérée sur T_xX (par exemple une forme symétrique dans le cas des variétés riemanniennes ou une forme antisymétrique pour une variété symplectique).

On a vu que si $\varphi : X \to Y$, on peut définir $T_x\varphi : T_xX \to T_yY$. Par dualité, on peut définir $T_y^*\varphi : T_y^*Y \to T_x^*X$: si $d_y f \in T_y^*Y$, on pose

$$T_y^*\varphi(d_y f) = d_x(f \circ \varphi)$$

On vérifie que $T_x\varphi$ et $T_y^*\varphi$ sont bien duales l'une de l'autre: si $v \in T_xX$,

$$[T_y^*\varphi(d_y f)](v) = d_x(f \circ \varphi)(v) = v(f \circ \varphi) = T_x\varphi(v)(f) = d_y f[T_x\varphi(v)] \tag{6}$$

Mais il n'est pas possible de définir une application $T^*\varphi : T^*Y \to T^*X$ en général car si $y \in Y$, on ne sait pas s'il admet un antécédent unique par φ. Lorsque φ est injective, on peut définir $T^*\varphi$ sur

$$\cup_{y\in\varphi(X)}\{y\} \times T_y^*Y$$

1.5 Section.

On a vu que TM et T^*M sont des variétés pouvant s'écrire sous la forme

$$\cup_{m\in M}\{m\}\times E_m$$

où E_m est un espace vectoriel, ce sont des exemples de fibrés vectoriels de base M, E_m est la fibre au-dessus du point de base m. On notera p la projection canonique:

$$p:\quad (m,v), m\in M, v\in E_m \quad\to\quad m=p(m,v)$$

On appelle alors section globale du fibré $F=TM$ ou $F=T^*M$ la donnée d'une application C^∞ de M sur F telle que $p\circ s=id$, en d'autres termes on associe à chaque point m de la base M un vecteur v de la fibre E_m de manière C^∞.

Exemple

Le champ des vitesses dans un fluide est une section de TM, M étant la variété occupée par le fluide. En mécanique newtonienne, le champ de gravitation est également une section.

La dualité entre TM et T^*M permet d'identifier les applications de $TM\to \mathbb{R}$ qui sont linéaires sur les fibres avec les sections de T^*M (également appelées champs de 1-formes) et de même les applications de $T^*M\to\mathbb{R}$ qui sont linéaires avec les sections de TM (les champs de vecteurs).

Remarque 16 *Les fibres d'un fibré vectoriel (par exemple le cotangent ou le tangent à une variété) sont des espaces vectoriels de même dimension, mais il n'existe pas d'isomorphisme naturel entre elles (c'est par exemple la donnée d'une connexion qui permet de le faire le long de chemins de la base du fibré).*

1.6 Conormal à une sous-variété.

On a vu que si M est une sous-variété de N, alors TM est de façon naturelle une sous-variété de TN. Par contre il n'existe pas de façon naturelle de voir T^*M comme une sous-variété de T^*N.

Pour les espaces cotangents, on définit le conormal T^*_MN de M, qui est naturellement une sous-variété de T^*N. Point par point, on prend l'orthogonal pour la dualité tangent-cotangent de T_mM vu comme sous-espace de T_mN:

$$T^*_MN=\{(m,d_mf), m\in M, d_mf\in T^*_mN \quad / \quad T_mM\subset \text{ Ker } d_mf\}$$

Dans la représentation graphique de la figure 2, p. 8, on prend l'ensemble des formes dont la ligne de niveau 0 contient T_mM, vu comme un sous-espace vectoriel de T_mN.

Si on prend une carte locale x sur N telle que M ait pour équations locales $x_1=...=x_k=0$ ($\dim M=n-k$), alors $(m,d_mf)\in T^*_MN$ si et seulement si:

- $m\in M$,
- $d_mf(\partial/\partial x_i)=0$ pour $i>k$.

Donc:

$$d_mf=\sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$$

On en déduit que T^*_MN est une sous-variété de T^*N de dimension $n-k+k=n=\dim N$.

Remarque 17 *S'il existe un isomorphisme canonique entre TN et T^*N issue d'une forme bilinéaire non dégénérée, T^*_MN s'identifie à $TM^\perp=\cup_{m\in M}\{m\}\times(T_mM)^\perp$ où $\perp$ désigne l'orthogonal pour la forme bilinéaire.*

2 Formes différentielles.

Dans cette section on généralise le calcul différentiel de $I\!R^n$ à une variété. On se ramène donc systématiquement à $I\!R^n$ au moyen de cartes locales.

2.1 Définition des tenseurs

On va poursuivre le point de vue développé à la section 1.5 et considérer la variété

$$T^{(k,l)}M = \cup_{m\in M}\{m\} \times T^*_m M \times ... \times T^*_m M \times T_m M \times ... \times T_m M$$

où l'on a fait k produits de $T^*_m M$ et l produits de $T_m M$. On appelle tenseur de type (k,l) la donnée d'une application C^∞ et multilinéaire de $T^{(k,l)}M$ sur $I\!R$ (i.e. linéaire par rapport à chaque $T^*_m M$ et à chaque $T_m M$). Par dualité, un tenseur de type (k,l) est une section de

$$T^{\otimes,(l,k)}M = \cup_{m\in M}\{m\} \times T^*_m M \otimes ... \otimes T^*_m M \otimes T_m M \otimes ... \otimes T_m M,$$

les champs de vecteurs sont des tenseurs de type $(1,0)$ et les champs de 1-forme des tenseurs de type $(0,1)$. Les tenseurs de type $(k,0)$ sont dits contravariants, ceux de type $(0,l)$ sont dits covariants.

A l'aide d'un tenseur de type (k,l) et d'un tenseur de type (k',l') on peut construire un tenseur de type $(k+k',l+l')$ en en faisant le produit (tensoriel). Grâce à la linéarité, tout tenseur de type (k,l) est une somme de produits tensoriels de k champs de vecteurs par l 1-formes, donc la dimension de $T^{(k,l)}_m M$ est n^{k+l}, puisque si T est un tenseur de type (k,l), il existe n^{k+l} réels tels que (en coordonnées locales):

$$T = \sum_{\mu_1,...,\mu_k,\nu_1,...,\nu_l\in[1,n]} T^{\mu_1\dots\mu_k}{}_{\nu_1\dots\nu_l}\frac{\partial}{\partial x_{\mu_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x_{\mu_k}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes ... \otimes dx^{\nu_l} \tag{7}$$

Lorsqu'on change de systèmes de coordonnées, on obtient les nouvelles composantes en fonction des anciennes en appliquant les formules de changement de coordonnées pour les champs de vecteurs et de 1-formes (4) et (5) dans (7):

$$T^{\mu'_1\dots\mu'_k}{}_{\nu'_1\dots\nu'_l} = \sum_{\mu_1,...,\mu_k,\nu_1,...,\nu_l\in[1,n]} \frac{\partial x_{\mu'_1}}{\partial x_{\mu_1}} \times ... \times \frac{\partial x_{\mu'_k}}{\partial x_{\mu_k}} \times \frac{\partial x_{\nu_1}}{\partial x_{\nu'_1}} \times \frac{\partial x_{\mu_l}}{\partial x_{\nu'_l}} T^{\mu_1\dots\mu_k}{}_{\nu_1\dots\nu_l}$$

Les composantes d'un tenseur T de type (k,l) sont donc les

$$T^{a_1\dots a_k}{}_{b_1\dots b_l}$$

avec $1 \le a_1 \le n, ..., 1 \le b_l \le n$.

Convention:

Lorsqu'on a des égalités entre composantes de tenseurs, on utilise des lettres romaines comme indice si l'égalité est valable dans tout système de coordonnées (c'est alors une égalité entre tenseurs) et des lettres grecques si l'égalité n'est valable que dans un système de coordonnées.

Par exemple, considérons le tenseur $dx^1 \wedge dx^2 = dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1$, on a:

$$(dx^1 \wedge dx^2)_{a_1 a_2} = (dx^1 \otimes dx^2)_{a_1 a_2} - (dx^2 \otimes dx^1)_{a_1 a_2}$$

car l'égalité composante par composante est vraie dans n'importe quel système de coordonnées, pas seulement dans le système $(x_1, ..., x_n)$. Par contre, l'égalité

$$[(dx^1 \otimes dx^2)_{\alpha_1\alpha_2}]^2 = (dx^1 \otimes dx^2)_{\alpha_1\alpha_2}$$

n'est vraie que dans le système de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ car ce n'est que dans ce système que toutes les composantes de ce tenseur sont 0 ou 1, donc on utilise les lettres grecques.

On adopte donc pour un champ de vecteur la notation v^c et pour un champ de 1-formes w_c .

Définition 18 *Soient v et w deux champs de vecteurs. On remarque que l'application:*

$$f \in C^\infty(m, I\!R) \;\to\; v(w(f)) - w(v(f))$$

vérifie les critères (1) et (2), il s'agit donc d'un champ de vecteurs appelé crochet de Lie des deux champs v et w et noté $[v, w]$.

En coordonnées, on a:

$$\begin{aligned} [v,w]f &= v(w(f)) - w(v(f)) \\ &= v(w^a\partial_a f) - w(v^a\partial_a f) \\ &= v^b\partial_b(w^a\partial_a f) - w^b\partial_b(v^a\partial_a f) \\ &= (v^b\partial_b w^a - w^b\partial_b v^a)\partial_a f \end{aligned}$$

donc:

$$[v,w]^a = v^b\partial_b v^a - w^b\partial_b v^a. \tag{8}$$

Remarque 19 *Il ne faut pas confondre les indices de composantes de tenseur avec d'éventuels indices permettant de différencier plusieurs tenseurs. Par exemple, ci-dessus dx^1 désigne une forme différentielle obtenue en prenant la différentielle de la première coordonnée, ce n'est pas la première composante d'un tenseur.*

2.2 Opérations sur les tenseurs.

2.2.1 Produit tensoriel.

Il a déja été défini dans la section précédente, on obtient ainsi une application de $T^{(k,l)}M \times T^{(k',l')}M$ dans $T^{(k+k',l+l')}$.

2.2.2 Contraction.

On suppose que $k \geq 1$ et $l \geq 1$. La contraction permet de définir un tenseur de type $(k-1, l-1)$:

$$T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} \to CT = T^{a_1..c..a_k}{}_{b_1..c..b_l}$$

On fixe tous les indices sauf l'indice covariant et l'indice contravariant par rapport auxquels on va effectuer la contraction. On obtient alors un endomorphisme φ de TM, il est défini en coordonnées locales par

$$v^c \to \varphi(v^c) = w^d = \sum_{c=1}^{n} T^{a_1..d..a_k}{}_{b_1..c..b_l} v^c$$

ou plus géométriquement, un tenseur d'ordre $(1,1)$ est une application bilinéaire de $T_m^*M \times T_mM$ donc si on fixe un vecteur v de T_mM on a une forme linéaire sur T_m^*M c'est-à-dire un vecteur $w = \varphi(v)$ de $T_mM = (T_m^*M)^*$.

On calcule alors la trace de cette application linéaire. On a ainsi défini un tenseur d'ordre $(k-1, l-1)$. En coordonnées locales, on a:

$$(CT)^{\mu_1\ldots\mu_{k-1}}{}_{\nu_1\ldots\nu_{l-1}} = \sum_{\lambda\in[1,n]} T^{\mu_1..\lambda..\mu_{k-1}}{}_{\nu_1..\lambda..\nu_{l-1}}$$

ce qui justifie la notation que l'on a choisie pour le tenseur CT.

Pour les tenseurs entièrement covariants ou entièrement contravariant, on peut définir les opérations de symétrisation et d'antisymétrisation.

2.2.3 Symétrisation.

Si on compose un tenseur covariant (ou contravariant) avec une permutation des l espaces vectoriels T_mM sur le produit desquels il agit, on obtient un nouveau tenseur. On peut donc construire un tenseur symétrique à partir d'un tenseur quelconque en faisant agir tout le groupe des permutations de l éléments:

$$T_{(a_1 \dots a_l)} = \frac{1}{l!} \sum_{\sigma \in \sigma_l} T_{a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(l)}}$$

les parenthèses signifient par convention que l'on a symétrisé le tenseur. Le coefficient $1/l!$ assure que le symétrisé d'un tenseur symétrique est égal à lui-même.

Par exemple, le tenseur métrique est un tenseur symétrique de type $(0, 2)$. Il est à la base de la géométrie riemannienne.

La dimension de l'espace des tenseurs symétriques covariants d'ordre l est

$$C^l_{n+l-1} = \#\{b/b_1 \leq \dots \leq b_k\}$$

(on rajoute $i - 1$ à chacun des b_i pour avoir des inégalités strictes d'où le résultat).

2.2.4 Antismétrisation.

$$T_{[a_1 \dots a_l]} = \frac{1}{l!} \sum_{\sigma \in \sigma_l} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} T_{a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(l)}}$$

où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ. Le crochet signifie que l'on a antisymétrisé le tenseur. Si $l > n$, le seul tenseur antisymétrique d'ordre l est le tenseur nul.

Un tenseur antisymétrique covariant [respectivement contravariant] d'ordre l est appelé l-forme différentielle [respectivement l-vecteur]. La dimension de l'espace $\Lambda^l_m M$ des l-formes différentielles est

$$C^l_n = \#\{b/b_1 < \dots < b_l\}.$$

Exemple:
Le champ électromagnétique est un tenseur antisymétrique d'ordre 2 dans l'espace-temps, en coordonnées locales:

$$F = (B_1 dx_1 + B_2 dx_2 + B_3 dx_3) \wedge dt + E_1 dx_2 \wedge dx_3 + E_2 dx_3 \wedge dx_1 + E_3 dx_1 \wedge dx_2$$

2.3 Formes différentielles.

Les opérations de produit tensoriel et de contraction se traduisent après antisymétrisation en produit extérieur ($\wedge$) de formes et produit intérieur d'un vecteur par une forme.

2.3.1 Produit extérieur.

On pose:

$$(T \wedge R)_{a_1 \dots a_{t+r}} = \frac{1}{t!r!} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \sum_{\sigma \in \sigma_{r+t}} T_{a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(t)}} R_{a_{\sigma(t+1)} \dots a_{\sigma(t+r)}}$$

Par exemple, dans le sytème de coordonnées $(x^1, .., x^n)$, $(dx^1)_{\alpha_1} = 1$ si $\alpha_1 = 1$ et 0 sinon, $(dx^2)_{\alpha_2} = 1$ si $\alpha_2 = 2$ et 0 sinon. Donc

$$(dx^1 \wedge dx^2)_{\alpha_1 \alpha_2} = \sum_{\sigma \in \sigma_2} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} (dx^1)_{\alpha_{\sigma(1)}} (dx^2)_{\alpha_{\sigma(2)}}$$

est non nul si $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 2)$ ou $(2, 1)$ et vaut respectivement 1 et -1. On a donc bien

$$dx^1 \wedge dx^2 = dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1$$

car deux tenseurs qui ont même composantes dans un système de coordonnées sont forcément égaux.

Propriétés du produit extérieur:

Proposition 20 *(Symétrie)* *On a:*

$$R \wedge T = (-1)^{rt} T \wedge R$$

Preuve:

$$(R \wedge T)_{a_1 \ldots a_{t+r}} = \frac{1}{t!r!} \sum_{\sigma \in \sigma_{r+t}} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} T_{a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(t)}} R_{a_{\sigma(t+1)} \ldots a_{\sigma(t+r)}}$$

On effectue le changement d'indice de sommation:

$$\sigma = \sigma' \circ \begin{pmatrix} 1 & \ldots & r & r+1 & \ldots & r+t \\ t+1 & \ldots & t+r & 1 & \ldots & t \end{pmatrix}$$

d'où:

$$(R \wedge T)_{a_1 \ldots a_{t+r}} = \frac{1}{t!r!} \sum_{\sigma' \in \sigma_{r+t}} (-1)^{\varepsilon(\sigma')} (-1)^{\varepsilon((t+1 \ldots t+r\ 1 \ldots t))} T_{a_{\sigma'(t+1)} \ldots a_{\sigma'(t+r)}} R_{a_{\sigma'(1)} \ldots a_{\sigma'(r)}}.$$

Comme

$$\varepsilon((t+1 \ldots t+r\ 1 \ldots t)) = \varepsilon((2 \ldots r+t\ 1)^t) = [(-1)^{r+t+1}]^t = (-1)^{rt},$$

on a bien

$$(R \wedge T)_{a_1 \ldots a_{t+r}} = (-1)^{rt} (T \wedge R)_{a_1 \ldots a_{t+r}}.$$

Proposition 21 *Le produit extérieur est associatif:*

$$(T \wedge R) \wedge S = T \wedge (R \wedge S)$$

Preuve:

$$\begin{aligned} ((T \wedge R) \wedge S)_{a_1 \ldots a_l} &= \frac{1}{(r+t)!s!} \sum_{\sigma \in \sigma_{t+r+s}} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} (T \wedge R)_{a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(t+r)}} S_{a_{\sigma(t+r+1)} \ldots a_{\sigma(t+r+s)}} \\ &= \frac{1}{(r+t)!r!t!s!} \sum (-1)^{\varepsilon(\sigma)+\varepsilon(\sigma')} T_{a_{\sigma' \circ \sigma(1)} \ldots a_{\sigma' \circ \sigma(t)}} R_{a_{\sigma' \circ \sigma(t+1)} \ldots a_{\sigma' \circ \sigma(t+r)}} S_{a_{\sigma(t+r+1)} \ldots a_{\sigma(t+r+s)}} \end{aligned}$$

où la somme porte sur $\sigma \in \sigma_{t+r+s}, \sigma' \in \sigma(\{\sigma(1), ..., \sigma(t+r)\})$. Comme S est antisymétrique:

$$S_{a_1 \ldots a_l} = \frac{1}{s!} \sum_{\sigma'' \in \sigma(\{\sigma(t+r+1), \ldots, \sigma(t+r+s)\})} (-1)^{\varepsilon(\sigma'')} S_{a_{\sigma'' \circ \sigma(t+r+1)} \ldots a_{\sigma'' \circ \sigma(t+r+s)}}$$

Avec σ' et σ'', on construit une permutation $\tilde{\sigma}$ de $\{1, ..., t+r+1\}$ qui fixe $\{\sigma(1), ..., \sigma(t+r)\}$ et $\{\sigma(t+r+1), ..., \sigma(t+r+s)\}$. Donc:

$$((T \wedge R) \wedge S)_{a_1 \ldots a_l} = \frac{1}{(r+t)!s!r!t!s!} \sum (-1)^{\varepsilon(\sigma)+\varepsilon(\tilde{\sigma})} T_{a_{\tilde{\sigma} \circ \sigma(1)} \ldots a_{\tilde{\sigma} \circ \sigma(t)}} R_{a_{\tilde{\sigma} \circ \sigma(t+1)} \ldots a_{\tilde{\sigma} \circ \sigma(t+r)}} S_{a_{\tilde{\sigma} \circ \sigma(t+r+1)} \ldots a_{\tilde{\sigma} \circ \sigma(t+r+s)}}$$

où la somme porte sur $\sigma, \tilde{\sigma} \in \sigma_{t+r+s}, \tilde{\sigma}$ fixant $\{\sigma(1), ..., \sigma(t+r)\}$ et $\{\sigma(t+r+1), ..., \sigma(t+r+s)\}$. On change d'indice de sommation en remplaçant σ par $\tau = \tilde{\sigma} \circ \sigma$, et on s'aperçoit que la somme obtenue ne dépend pas de $\tilde{\sigma}$: lorsqu'on somme sur $\tilde{\sigma}$, il apparaît le nombre de permutations qui fixent $\{\sigma(1), ..., \sigma(t+r)\}$ et $\{\sigma(t+r+1), ..., \sigma(t+r+s)\}$, c'est-à-dire $s!(r+t)!$. Il vient finalement:

$$((T \wedge R) \wedge S)_{a_1 \ldots a_l} = \frac{1}{r!t!s!} \sum_{\sigma \in \tau_{t+r+s}} (-1)^{\varepsilon(\tau)} T_{a_{\tau(1)} \ldots a_{\tau(t)}} R_{a_{\tau(t+1)} \ldots a_{\tau(t+r)}} S_{a_{\tau(t+r+1)} \ldots a_{\tau(t+r+s)}} \quad (9)$$

On montre la même formule pour $(T \wedge (R \wedge S))$ en utilisant le calcul précédent et les propriétés de symétrie de $\wedge$, on conclut ainsi à l'associativité.

On généralise sans difficultés la formule (9) a un produit extérieur de n formes différentielles de degré quelconque. Par exemple, si $(x_1, ..., x_n)$ est un système de coordonnées locales, on a:

$$(dx^{i_1} \wedge \ldots dx^{i_k})_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} = 0, 1 \text{ ou } -1$$

le résultat est nul si deux au moins des indices i_k sont égaux ou si les ensembles $\{i_1, ..., i_k\}$ et $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ sont distincts et vaut $(-1)^{\varepsilon(\sigma)}$ dans le cas contraire, (σ désignant la permutation telle que $\sigma(i_k) = \alpha_k$).

Base des l-formes différentielles. En coordonnées locales, on peut prendre les

$$dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_l}, \quad 1 \leq i_1 < ... < i_l \leq n$$

(ici les i_k sont des indices permettant de différencier des formes différentielles, ce ne sont pas des composantes d'un tenseur).

Remarque 22 *Les fonctions de M à valeurs dans $I\!R$ peuvent être vues comme des 0-formes, les formules précédentes sont alors valables si on définit le produit extérieur d'une p-forme par une 0-forme comme le produit usuel.*

2.3.2 Produit intérieur par un champ de vecteurs.

Définition 23 *Soit T un tenseur antisymétrique et v un champ de vecteurs. On contracte le tenseur sur sa 1ère composante avec le champ de vecteurs:*

$$(i(v)T)_{a_2 \ldots a_t} = T_{a_1 \ldots a_t} v^{a_1}$$

on obtient ainsi un tenseur de type $(0, t-1)$ qui est clairement antisymétrique.

Exemple:
Si v a pour coordonnées (v_1, v_2) dans la base duale de la base $(dx^1, dx^2, ...)$ alors:

$$i(v)(dx^1 \wedge dx^2) = v^1 dx^2 - v^2 dx^1$$

Définition 24 *On appelle dérivation D_d d'ordre $d \in Z\!\!\!Z$ une application linéaire définie de $T^{(0,l)}$ vers $T^{(0,l+d)}$ pour tout l telle que pour toutes formes différentielles T et R:*

$$D_d(T \wedge R) = (D_d T) \wedge R + (-1)^{dt} T \wedge D_d R \tag{10}$$

Proposition 25 *Le produit intérieur par un vecteur est une dérivation d'ordre -1, i.e.:*

$$i(v)(T \wedge R) = (i(v)T) \wedge R + (-1)^t T \wedge (i(v)R)$$

Preuve:

$$\begin{aligned} (i(v)(T \wedge R))_{a_2 \ldots a_{t+r}} &= (T \wedge R)_{a_1 \ldots a_{t+r}} v^{a_1} \\ &= \frac{1}{t!r!} \sum_{\sigma \in \sigma_{t+r}} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} T_{a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(t)}} R_{a_{\sigma(t+1)} \cdots a_{\sigma(t+r)}} v^{a_1} \end{aligned} \tag{11}$$

On décompose alors la somme en regardant si $k = \sigma^{-1}(1) \in \{1, ..., t\}$ ou à $\{t+1, ..., t+r\}$. Dans le premier cas, l'indice a_1 est dans le tenseur T et dans le deuxième cas dans le tenseur R.

Premier cas:
Si $k \neq 1$, on associe à σ la permutation $\sigma' \in \sigma(\{2, ..., t+r\})$ en posant

$$\sigma'(k) = \sigma(1), \quad \sigma'(j) = \sigma(j), j \neq k, j \geq 2,$$

(si $k = 1$, on pose $\sigma' = \sigma$), on peut réécrire σ sous la forme:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & k & \ldots & t+r \\ \sigma'(k) & \sigma'(2) & \ldots & \sigma'(i) & \ldots & 1 & \ldots & \sigma'(t+r) \end{pmatrix}$$

Si $k \neq 1$, on a $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma') + 1$, donc

$$(-1)^{\varepsilon(\sigma)} T_{a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(t)}} = (-1)^{\varepsilon(\sigma')+1} T_{a_{\sigma'(k)} a_{\sigma'(2)} \cdots a_{\sigma'(k-1)} a_1 a_{\sigma'(k+1)} \cdots a_{\sigma'(t)}} = (-1)^{\varepsilon(\sigma')} T_{a_1 a_{\sigma'(2)} \cdots a_{\sigma'(l)}}$$

car T est antisymétrique. Si $k=1$, l'égalité entre les deux extrêmes est évidente. Donc la première partie de la somme (11) s'écrit:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{t!r!}\sum_{\sigma'\in\sigma(\{2,\ldots,t+r\}),1\leq k\leq t}(-1)^{\varepsilon(\sigma')}(i(v)T)_{a_{\sigma'(2)}\ldots a_{\sigma'(t)}}R_{a_{\sigma'(t+1)}\ldots a_{\sigma'(t+r)}}\\
&= \frac{t}{t!r!}(t-1)!r![(i(v)T)\wedge R]_{a_2\ldots a_{t+r}}\\
&= [(i(v)T)\wedge R]_{a_2\ldots a_{t+r}}
\end{aligned}$$

Deuxième cas:
On associe σ' à σ comme dans le premier cas, et on obtient comme terme général de la somme:

$$(-1)^{\varepsilon(\sigma')+1}T_{a_{\sigma'(k)}a_{\sigma'(2)}\ldots a_{\sigma'(t)}}R_{a_{\sigma'(t+1)}\ldots a_{\sigma'(k-1)}a_1 a_{\sigma'(k+1)}\ldots a_{\sigma(t+r)}}v^{a_1}$$

On fait alors le changement d'indice de sommation:

$$\tilde{\sigma}=\sigma'\circ\begin{pmatrix} 2 & 3 & \ldots & t+1 & k\\ k & 2 & \ldots & t & t+1\end{pmatrix}$$

le terme général s'écrit alors:

$$(-1)^{\varepsilon(\tilde{\sigma})+1+t}T_{a_{\tilde{\sigma}(2)}\ldots a_{\tilde{\sigma}(t+1)}}R_{a_{\tilde{\sigma}(k)}a_{\tilde{\sigma}(t+2)}\ldots a_{\tilde{\sigma}(k-1)}a_1 a_{\tilde{\sigma}(k+1)}\ldots a_{\tilde{\sigma}(t+r)}}v^{a_1}$$

On utilise enfin l'antisymétrie du tenseur R, la deuxième partie de la somme s'écrit:

$$\frac{1}{t!r!}r\sum_{\tilde{\sigma}\in\sigma(\{2,\ldots,t+r\})}(-1)^{\varepsilon(\tilde{\sigma})+t}T_{a_{\tilde{\sigma}(2)}\ldots a_{\tilde{\sigma}(t+1)}}R_{a_1 a_{\tilde{\sigma}(t+2)}\ldots a_{\tilde{\sigma}(t+r)}}v^{a_1}$$

qui est bien égal à $(-1)^t T\wedge(i(v)R)$.

Remarque 26 *On définit le produit intérieur d'un vecteur par une fonction comme étant nul, les formules de ce §sont alors valables pour les formes différentielles de degré quelconque.*

2.4 Opérateur d.

Si on se donne $f : M \to I\!R$, alors $df : TM \to I\!R$, on peut aussi voir df comme une section de T^*M. On passe ainsi d'une forme différentielle de degré 0 à une forme différentielle de degré 1. On va généraliser l'opérateur d à toutes les formes différentielles.

Théorème 27 *Il existe une unique dérivation $d : \Lambda^l M \to \Lambda^{l+1}M$ d'ordre 1 telle que df soit l'application linéaire tangente de f et telle que $d^2=0$. On a:*

$$(dT)_{a_1\ldots a_{t+1}} = \sum_{k=1}^{t+1}(-1)^{k-1}\partial_{a_k}T_{a_1\ldots a_{k-1}a_{k+1}\ldots a_{t+1}} \tag{12}$$

$$d(fdx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}) = df\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k} \tag{13}$$

Preuve:
Commençons par l'unicité. Si d et d' satisfont aux exigences du théorème, alors $d=d'$ sur les fonctions, de plus

$$d(dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k})=0=d'(dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k})$$

car $d^2=d'^2=0$. Puis:

$$d(fdx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k})=df\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}=d'f\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}=d'(fdx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k})$$

donc $d'=d$ car tout tenseur antisymétrique est localement combinaison linéaire finie de tenseur du type $fdx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$. Il suffit donc de prouver l'existence locale de d, donc de vérifier que la formule (12) définit une dérivation d'ordre 1 telle que $d^2=0$.

$$
\begin{aligned}
(d^2T)_{a_1\dots a_{t+2}} &= \sum_{k=1}^{t+2}(-1)^{k-1}\partial_{a_k}(dT)_{a_1\dots a_{k-1}a_{k+1}\dots a_{t+2}} \\
&= \sum_{k=1}^{t+2}\sum_{1\le j\le t+2, j\neq k}\partial_{a_k}((-1)^{f(j,k)}\partial_{a_j}T_{a_1\dots a_{j-1}a_{j+1}\dots a_{k-1}a_{k+1}\dots a_{t+2}})
\end{aligned}
$$

où $f(j,k) = j-1$ si $j<k$ et $f(j,k) = j-2$ si $j>k$. Ce qui donne $d^2T = 0$ car les termes (j,k) et (k,j) de la somme s'annulent.

Dernier point à vérifier: d est une dérivation d'ordre 1, i.e.

$$
d(T \wedge R) = (dT)\wedge R + (-1)^t T\wedge (dR)
$$

Pour simplifier les notations, on adopte la convention que si on recouvre par le signe $\hat{}$ un indice d'un ensemble d'indice, c'est qu'il faut le retirer de l'ensemble d'indice, par exemple:

$$
a_1 \dots \hat{a_k} \dots a_t \text{ signifie } a_1\dots a_{k-1}a_{k+1}\dots a_t
$$

On a alors:

$$
\begin{aligned}
d(T\wedge R)_{a_1\dots a_{t+r+1}} &= \sum_{k=1}^{t+r+1}(-1)^{k-1}\partial_{a_k}(T\wedge R)_{a_1\dots\hat{a_k}\dots a_{t+r+1}} \\
&= \frac{1}{t!r!}\sum(-1)^{k-1+\varepsilon(\sigma')}\partial_{a_k}(T_{a_{\sigma'(1)}\dots\hat{a_k}\dots a_{\sigma'(t+1)}}R_{a_{\sigma'(t+2)}\dots a_{\sigma'(t+r+1)}})
\end{aligned}
$$

où la somme porte sur $1\le k\le t+r+1$ et $\sigma' \in \sigma(\{1,\dots,\hat{k},\dots,t+r+1\})$. Remarquons que si $k\ge t+2$, il faut décaler les indices du terme général de la somme en:

$$
\partial_{a_k}(T_{a_{\sigma'(1)}\dots a_{\sigma'(t)}}R_{a_{\sigma'(t+1)}\dots\hat{a_k}\dots a_{\sigma'(t+r+1)}})
$$

On peut décomposer ce terme général en deux, en faisant porter la dérivation sur T ou sur R. Il s'agit d'identifier avec $dT\wedge R$ dans le premier cas et avec $(-1)^tT\wedge dR$ dans le second. Or:

$$
(dT\wedge R)_{a_1\dots a_{t+r+1}} = \frac{1}{(t+1)!r!}\sum(-1)^{\varepsilon(\sigma)+\alpha-1}\partial_{a_{\sigma(\alpha)}}T_{a_{\sigma(1)}\dots\hat{a_{\sigma(\alpha)}}\dots a_{\sigma(t+1)}}R_{a_{\sigma(t+2)}\dots a_{\sigma(t+r+1)}}
$$

où la somme porte sur $\sigma\in\sigma_{t+r+1}$ et sur $\alpha\in[1,t+1]$. A un tel couple (σ,α), nous allons faire correspondre un triplet (σ',k,α) où σ' est une permutation fixant k, qu'on identifie naturellement avec une permutation de $\sigma(\{1,\dots,\hat{k},\dots,t+r+1\}$: on pose $k=\sigma(\alpha)$ et $\sigma'\circ(\alpha\dots k)=\sigma$ de telle sort que:

$$
\sigma = \begin{pmatrix} \dots & \alpha & \dots & k & \dots \\ \dots & k & \dots & \sigma(k) & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & k & \alpha & \dots & k-1 & k+1 & \dots \\ \dots & k & \sigma(\alpha+1) & \dots & \sigma(k) & \sigma(k+1) & \dots \end{pmatrix}\circ(\alpha\dots k)
$$

Comme $(\alpha\dots k)$ est un cycle de longueur $k-\alpha+1$ donc

$$
\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma') + k - \alpha \Rightarrow \varepsilon(\sigma)+\alpha-1 = \varepsilon(\sigma')+k-1
$$

Le terme général de la somme de $dT\wedge R$ devient si $k>t+1$

$$
(-1)^{\varepsilon(\sigma')+k-1}\partial_{a_k}T_{a_{\sigma'(1)}\dots a_{\sigma'(\alpha-1)}\hat{a_k}a_{\sigma'(\alpha)}\dots a_{\sigma'(t)}}R_{a_{\sigma'(t+1)}\dots a_{\sigma'(k-1)}a_{\sigma'(k+1)}\dots a_{\sigma'(t+r+1)}}
$$

Si $k\le t+1$, le terme général s'écrit:

$$
(-1)^{\varepsilon(\sigma')+k-1}\partial_{a_k}T_{a_{\sigma'(1)}\dots a_{\sigma'(\alpha-1)}\hat{a_k}a_{\sigma'(\alpha)}\dots a_{\sigma'(k-1)}a_{\sigma'(k+1)}\dots a_{\sigma'(t+1)}}R_{a_{\sigma'(t+2)}\dots a_{\sigma'(t+r+1)}}
$$

On déplace ensuite le trou $\hat{a_k}$ à sa place entre $a_{\sigma'(k-1)}$ et $a_{\sigma'(k+1)}$, on constate que ce terme général ne dépend plus de α, on somme donc par rapport à $\alpha\in[1,t+1]$ qui donne un facteur $t+1$ que l'on simplifie avec

$1/(t+1)!$ en $1/t!$ et on obtient le terme général de la somme de $d(T \wedge R)$ lorsqu'on fait porter la dérivation sur T.

De même,

$$(T \wedge dR)_{a_1 \dots a_{t+r+1}} = \frac{1}{t!(r+1)!} \sum (-1)^{\alpha-t-1} T_{a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(t)}} \partial_{a_{\sigma(\alpha)}} R_{a_{\sigma(t+1)} \dots \hat{a_{\sigma(\alpha)}} a_{\sigma(t+r+1)}}$$

où la somme porte sur $\sigma \in \sigma_{r+t+1}$ et sur $\alpha \in [t+1, t+r+1]$. On effectue la même correspondance que ci-dessus, on obtient donc le terme général de $d(T \wedge R)$ lorsqu'on fait porter la dérivation sur R multiplié par $(-1)^t$.

Exercices

1. Par l'argument d'unicité, on sait que si on change de base la formule (12) détermine l'action de d dans la nouvelle base. (Ceci justifie a postériori l'utilisation de lettres romaines dans la démonstration de l'existence locale de d alors qu'on aurait dû utiliser des lettres grecques). Vérifiez le directement.

2. Montrer que $i(v)d + di(v)$ est une dérivation d'ordre 0. Plus généralement si D et D' sont deux dérivations d'ordre respectifs r et r', montrer que:

   $$[D, D'] = DD' - (-1)^{rr'} D'D$$

   est une dérivation d'ordre $r + r'$.

   Montrer que si deux dérivations d'ordre supérieur ou égal à -1 coincident sur les fonctions et sur les 1-formes, alors elles coincident sur toutes les formes différentielles. Montrer que si deux dérivations d'ordre positif coincident sur les fonctions et commutent avec d alors elles sont égales.

3. On définit le produit extérieur de vecteurs comme celui des 1-formes. Montrer que

   $$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(v_1 \wedge \dots v_k) = k! \det(\omega_i(v_j))$$

Solution du 3eme exercice:

On a:

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)_{a_1 \dots a_k} = \sum_{\sigma \in \sigma_k} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} (\omega_1)_{a_{\sigma(1)}} \dots (\omega_k)_{a_{\sigma(k)}}$$

et l'analogue pour le k-vecteur:

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_k)^{a_1 \dots a_k} = \sum_{\tau \in \sigma_k} (-1)^{\varepsilon(\tau)} (v_1)^{a_{\tau(1)}} \dots (v_k)^{a_{\tau(k)}}$$

donc:

$$\begin{aligned}
(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) &= (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)_{a_1 \dots a_k} (v_1 \wedge \dots \wedge v_k)^{a_1 \dots a_k} \\
&= \sum_{\sigma, \tau} (-1)^{\varepsilon(\sigma)+\varepsilon(\tau)} (\omega_1)_{a_{\sigma(1)}} \dots (\omega_k)_{a_{\sigma(k)}} (v_1)^{a_{\tau(1)}} \dots (v_k)^{a_{\tau(k)}} \\
&= \sum_{\sigma, \tau} (-1)^{\varepsilon(\tau^{-1} \circ \sigma)} \omega_1(v_{\tau^{-1} \circ \sigma(1)}) \dots \omega_k(v_{\tau^{-1} \circ \sigma(k)}) \\
&= k! \sum_{\sigma' \in \sigma_k} (-1)^{\varepsilon(\sigma')} \omega_1(v_{\sigma'(1)}) \dots \omega_k(v_{\sigma'(k)}) \\
&= k! \det((\omega_i(v_j))_{1 \leq i,j \leq k}
\end{aligned}$$

2.5 Tenseurs et difféomorphismes.

Soit φ une application C^∞ de $M \to N$. On rappelle que:

$$T_x\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} T_xM & \to & T_{\varphi(x)}N \\ v & \to & T_x\varphi(v) \end{array} \right. , \quad T_x\varphi(v)(f) = v(f \circ \varphi)$$

et:

$$T^*_{\varphi(x)}\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} T^*_{\varphi(x)}N & \to & T^*_x M \\ \omega = d_{\varphi(x)}f & \to & T^*_{\varphi(x)}\varphi\omega = d_x(f\circ\varphi) \end{array} \right. .$$

Supposons maintenant que φ est un difféomorphisme de M dans lui-même. Si on se donne un champ de vecteur v, on peut en déduire deux champs de vecteurs en faisant agir sur v soit φ, soit φ^{-1}. On définit ainsi:

$$\varphi^* : \left\{ \begin{array}{ccc} T_x M & \to & T_x M \\ v(x) & \to & (\varphi^* v)(x) = T_{\varphi(x)}\varphi^{-1}(v(\varphi(x)) \end{array} \right.$$

et:

$$\varphi_* : \left\{ \begin{array}{ccc} T_x M & \to & T_x M \\ v(x) & \to & (\varphi_* v)(x) = T_{\varphi^{-1}(x)}\varphi(v(\varphi^{-1}(x)) \end{array} \right.$$

Soit f une fonction C^∞ sur M, on a:

$$\varphi^*(fv)(x) = T_{\varphi(x)}\varphi^{-1}[fv(\varphi(x)] = f\circ\varphi(x)T_{\varphi(x)}\varphi^{-1}[v(\varphi(x))]$$

par linéarité de l'application linéaire tangente. On pose donc:

$$\varphi^*(f) = f\circ\varphi$$

De même, on pose:

$$\varphi_*(f) = f\circ\varphi^{-1}$$

On définit l'action de φ^* et de φ_* sur les 1-formes par:

$$\varphi^*(\omega)(x) = (T^*_{\varphi(x)}\varphi)\omega(\varphi(x)), \quad \varphi_*(\omega)(x) = (T^*_{\varphi^{-1}(x)}\varphi^{-1})\omega(\varphi^{-1}(x))$$

de sorte que $\varphi^*(f\omega) = \varphi^* f \varphi^* \omega$.

Appliquons la relation

$$[T^*_{\varphi(x)}\varphi\omega](w)(x) = \omega[T_x\varphi(w)](x)$$

à $w = \varphi^*(v)$:

$$[(T^*_{\varphi(x)}\varphi)\omega]\varphi^*(v) = \omega(\varphi(x))[T_x\varphi(w)] = \omega(\varphi(x))[T_x\varphi T_{\varphi(x)}\varphi^{-1}v(\varphi x))$$

on a donc:

$$\varphi^*\omega(\varphi^*(v)) = \varphi^*(\omega(v))$$

On peut maintenant étendre la définition de φ^* et φ_* aux tenseurs en imposant:

$$\varphi^*(T\otimes R) = \varphi^* T \otimes \varphi^* R$$

et de même pour φ_*.

2.6 Dérivée de Lie.

La donnée d'un champ de vecteurs v^a définit un groupe à un paramètre de difféomorphismes, le flot φ_t de v^a, tel que:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \varphi_0(x) & = & x \\ \frac{d}{dt}\varphi_t(x) & = & v(\varphi_t(x)) \end{array} \right.$$

C'est-à-dire que la courbe $\varphi_t(x)$ paramétrée par t admet comme vecteur vitesse à l'instant t le vecteur v^a (figure 4, p. 20).

Remarque 28 *Si v^a est un champ de vecteurs C^∞, alors pour $x_0 \in M$ donné, il existe un ouvert U de M contenant x_0 et un réel $t_0 > 0$ tel que le flot φ_t soit défini pour $x \in U$ et $t \in]-t_0, t_0[$.*

Définition 29 *Soit T un tenseur. On définit la dérivée de Lie de T selon le champ de vecteurs v^a par:*

$$\mathcal{L}_v(T) = \lim_{t\to 0}\frac{(\varphi_t)^*T - T}{t}$$

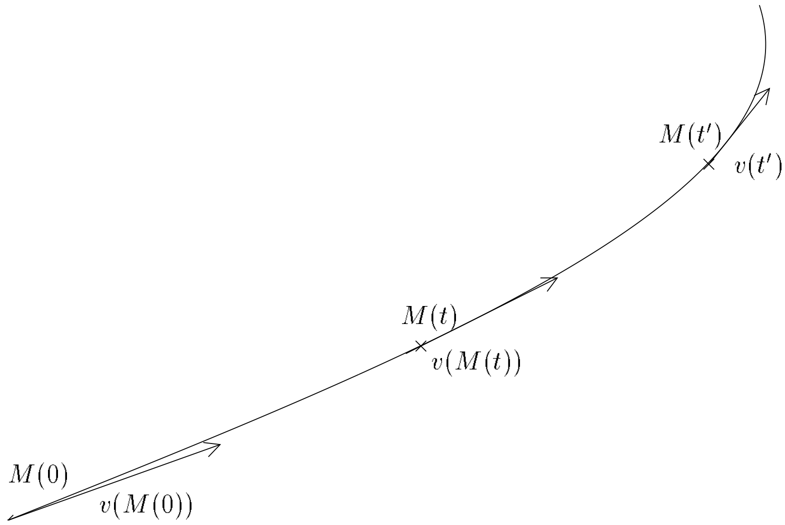

Figure 4: Le flot d'un champ de vecteur.

Exemple: dérivée de Lie selon v d'un champ de vecteur w. Graphiquement, on représente le champ de vecteurs w au point M par $M\tilde{M}$, on suit alors le flot de v en partant du point M et du point $\tilde{M}$, ce qui déforme le vecteur w (figure 5, p. 21). (Bien entendu, il faut choisir le point $\tilde{M}$ très voisin de M dans la direction de $w(M)$).

Calculons en coordonnées locales $\mathcal{L}_v(w)$. On a:

$$\varphi_t(x) = x + tv(x) + o(t) \quad \Rightarrow \quad d_x\varphi_{-t} = \mathrm{id} - td_xv + o(t)$$

Donc:

$$\begin{aligned}
(\varphi_t)^* w &= d\varphi_{-t} w(\varphi_t(x)) \\
&= d\varphi_{-t} w(x + tv(x) + o(t)) \\
&= (\mathrm{id} - td_xv)(w + tdw.v) + o(t) \\
&= w + tdw.v - tdv.w + o(t)
\end{aligned}$$

et:

$$\mathcal{L}_v w = dw.v - dv.w$$

ou en coordonnées:

$$[\mathcal{L}_v(w)]^b = \partial_a w^b v^a - \partial_a v^b w_a$$

finalement la dérivée de Lie d'un champ de vceteur est égale au crochet de Lie de ce champ de vecteurs avec le champ par rapport auquel on dérive:

$$\mathcal{L}_v(w) = [v, w]$$

2.7 Dérivée de Lie de formes différentielles.

Proposition 30 *On a:*

$$d\varphi^* = \varphi^* d, \quad \varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) \wedge \varphi^*(\omega_2)$$

La deuxième égalité est évidente, car φ^* commute avec le produit tensoriel et le produit extérieur est un produit tensoriel antisymétrisé. La première propriété se montre en utilisant l'unicité de d. Il suffit de voir

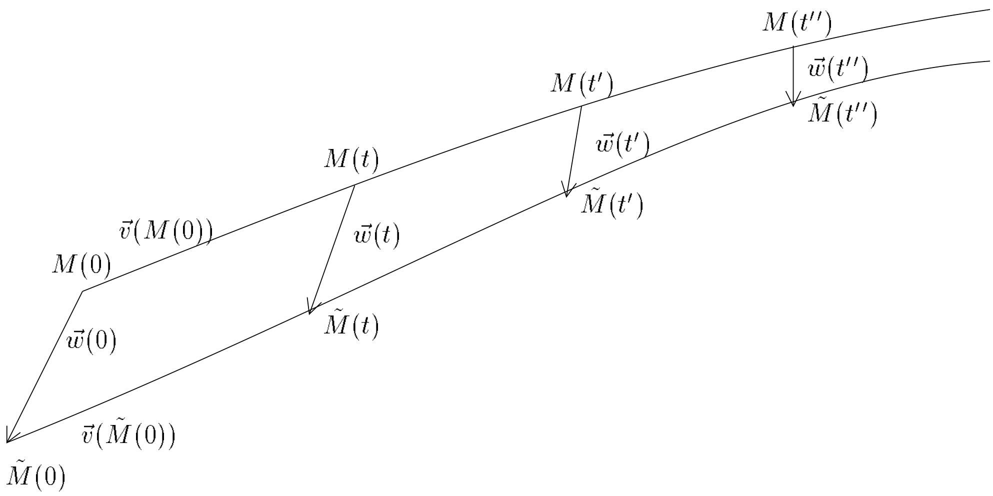

Figure 5: Transformation d'un vecteur le long du flot d'un autre champ de vecteurs.

que $\varphi_* d\varphi^*$ vérifie les propriétés du théorème 27. Si f est une fonction C^∞, on a:

$$\begin{aligned}
(\varphi_* d\varphi^*)(f)_{(x)}(v) &= (\varphi_* d\varphi^*)(f)_{(x)}(\varphi_*\varphi^*(v)) \\
&= \varphi_*[d\varphi^* f_{(x)}.\varphi^*(v)_{(x)}] \\
&= \varphi_*[d_x(f\circ\varphi).T_{\varphi(x)}\varphi^{-1}.v(\varphi(x))] \\
&= \varphi_*[d_{\varphi(x)}f.T_x\varphi T_{\varphi(x)}\varphi^{-1}.v(\varphi(x))] \\
&= \varphi_*[d_{\varphi(x)}f.v(\varphi(x))] \\
&= \varphi_*\varphi^*((v(f)) \\
&= v(f) \\
&= d_x f.v
\end{aligned}$$

donc $\varphi_* d\varphi^* f = df$ soit $d\varphi^* = \varphi^* d$ et:

$$(\varphi^* d\varphi_*)(\varphi^* d\varphi_*) = \varphi^* d^2\varphi_* = 0.$$

De la proposition on déduit immédiatement le:

Corollaire 31 *La dérivée de Lie est une dérivation d'ordre 1 qui commute avec d.*

2.8 Formule de Cartan.

On a:

$$\frac{d}{dt}(f\circ\varphi_t) = v(f) \quad\Rightarrow\quad \mathcal{L}_v(f) = v(f).$$

Donc $\mathcal{L}_v - [i(v)d + di(v)]$ est une dérivation d'ordre 0 qui commute avec d et est nulle sur les fonctions. Elle est donc nulle sur toutes les formes différentielles:

$$\mathcal{L}_v = i(v)d + di(v) \tag{14}$$

On démontre aussi que $i([v,w])$ et $\mathcal{L}_v i(w) - i(w)\mathcal{L}_v$ sont deux dérivations d'ordre -1 qui coïncident sur les 1-formes, donc:

$$\mathcal{L}_v(i(w)\omega) = i(w)(\mathcal{L}_v\omega) + i([v,w])\omega \tag{15}$$

Preuve:

Il faut montrer l'égalité sur les 1-formes, donc sur les gdf où f et g sont deux fonctions C^∞. Par définition du crochet de Lie, on a:

$$i([v,w])(gdf) = g \times (\ v(w(f)) - w(v(f))\ )$$

Or:

$$\mathcal{L}_v(i(w)(gdf)) = \mathcal{L}_v(gw(f)) = v(g)w(f) + gv(w(f))$$

et, comme $\mathcal{L}_v = i(v)d + di(v)$:

$$\begin{aligned}
i(w)\mathcal{L}_v(gdf) &= i(w)(\ d(gv(f)) + i(v)dg \wedge df\ ) \\
&= w(gv(f)) + i(w)(\ v(g)df - v(f)dg\ ) \\
&= w(g)v(f) + gw(v(f)) + v(g)w(f) - v(f)w(g) \\
&= gw(v(f)) + v(g)w(f)
\end{aligned}$$

On fait la différence et on conclut bien à l'égalité.

3 Structure symplectique du cotangent.

On étudie dans cette section des variétés disposant d'une donnée supplémentaire: une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée ω telle que $d\omega = 0$.

3.1 Espaces vectoriels symplectiques

Définition 32 *Un espace vectoriel E de dimension finie est symplectique s'il est muni d'une forme bilinéaire antisymétrique ω non dégénérée (en particulier on verra que E ne peut être que de dimension paire).*

Exemple:
Si F est un espace vectoriel de dimension finie et F^* son dual, alors $E = F \times F^*$ muni de la forme:

$$\omega((x,\xi),(x',\xi')) = \xi'(x) - \xi(x')$$

est un espace vectoriel symplectique. En effet, la forme ω est bilinéaire et antisymétrique (évident) et non dégénérée car si il existe (x',ξ') tel que:

$$\forall (x,\xi), \quad \omega((x,\xi),(x',\xi')) = 0$$

alors $\xi'(x) = \xi(x')$, on choisit tout d'abord $x = 0$, on obtient

$$\forall \xi, \quad \xi(x') = 0$$

donc $x' = 0$ puisque $F^{**} = F$. On en déduit:

$$\forall x, \quad \xi'(x) = 0$$

donc $\xi' = 0$ également.

Proposition 33 *L'application linéaire ω définie de E dans E^* par:*

$$\omega : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E^* \\ x & \to & \omega(x) \end{array} \right. , \quad /\omega(x)(y) = \omega(x,y)$$

est un isomorphisme.

Preuve: ω est injectif car $\omega(x) = 0$ entraîne $\forall y, \omega(x,y) = 0$ donc $x = 0$ puisque la forme bilinéaire est non dégénérée.

Définition 34 *Si L est un sous-espace vectoriel de E, on définit son orthogonal*

$$L^\perp = \{x \in E / \forall y \in L, \omega(x,y) = 0\}$$

qui est un sous-espace vectoriel de E. On dit que L est isotrope [respectivement involutif, lagrangien] si $L \subset L^\perp$ [resp. $L \supset L^\perp$, $L = L^\perp$].

Proposition 35 *1. $L \subset M \Rightarrow M^\perp \subset L^\perp$,*

2. $(L^\perp)^\perp = L$,

3. $dimL + dimL^\perp = dimE$,

4. $(L \cap M)^\perp = L^\perp + M^\perp$,

5. $(L + M)^\perp = L^\perp \cap M^\perp$,

6. L isotrope $\Leftrightarrow$ $L^\perp$ involutif,

7. L isotrope maximal $\Leftrightarrow$ L involutif minimal $\Leftrightarrow$ L lagrangien,

8. *Si L est isotrope, alors L lagrangien* $\Leftrightarrow$ *dim*$E = 2$*dim*L.

9. *Si L est isotrope, alors il existe un sous-espace lagrangien L' de E qui contient L.*

Preuve

Les cinq premières propriétés se démontrent directement ou en utilisant le fait que $L^\perp = \omega^{-1}(L^\circ)$ où L° désigne l'orthogonal de $L \subset E$ dans E^*. La sixième propriété est une conséquence des deux premières.

Pour la septième, si L est isotrope maximal, supposons qu'il existe $e \in L^\perp - L$, alors $L + \mathbb{R}e$ est isotrope, car si l et l' appartiennent à L:

$$\omega(l + \lambda e, l' + \lambda' e) = \omega(l, l') + \lambda'\omega(l, e) + \lambda\omega(e, l') + \lambda\lambda'\omega(e, e) = 0$$

Ce qui contredit la maximalité de L, donc L est lagrangien.

Huitième propriété: si L est lagrangien,

$$\dim E = \dim L + \dim L^\perp = 2\dim L$$

Réciproquement, si $\dim E = 2\dim L$, alors $\dim L = \dim L^\perp$, comme on sait aussi que $L \subset L^\perp$ (L est isotrope), on en déduit $L = L^\perp$.

Neuvième propriété: Soit L isotrope, si L est maximal, c'est terminé (L est lagrangien). Sinon il existe un espace vectoriel L_1 isotrope et qui contient strictement L, on recommence le processus avec L_1, comme $\dim L_1 \geq \dim L + 1$, après un nombre fini d'étapes, on doit tomber sur un isotrope maximal puisque la dimension de E est finie.

Théorème 36 *Soit L un sous-espace lagrangien d'un espace vectoriel symplectique E. Alors L admet un supplémentaire lagrangien L' dans E. Si on choisit une base $\{e_1, ..., e_n\}$ de L, on peut trouver une base $\{f_1, ..., f_n\}$ de L' telle que dans la base $\{e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n\}$ de $L + L'$, la forme bilinéaire ω ait pour matrice:*

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right)$$

Preuve:

Soit M un sev de E tel que:

$$\begin{cases} M \subset M^\perp \\ L \cap M = \{0\} \end{cases}$$

On va faire grossir ce sous-espace isotrope M jusqu'à en faire un espace lagrangien L'.

Si $M = M^\perp$, c'est terminé car M est lagrangien, on a alors $\dim L = \dim M = \frac{1}{2}\dim E$, donc L et M sont supplémentaires.

Sinon, $M^\perp \cap L \neq \{0\}$ car $\dim M^\perp + \dim L > \dim E$. Comme $M \cap L = \{0\}$, $M^\perp \cap L$ n'est pas contenu dans M, donc en passant aux orthogonaux, $M^\perp$ n'est pas contenu dans $M + L$. On choisit un vecteur $e \in M^\perp$ qui n'est pas élément de $M + L$ et on pose $M_1 = M + \mathbb{R}e$. Le sev M_1 est encore isotrope (car $e \in M^\perp$) et vérifie $M_1 \cap L = \{0\}$ car e n'appartient pas à $M + L$.

On a donc montré l'existence d'un supplémentaire lagrangien de L. Soit $\{g_1, ..., g_n\}$ une base de L' et considérons la base duale $\{e_1^*, ..., e_n^*, g_1^*, ..., g_n^*\}$ de $\{e_1, ..., e_n, g_1, ..., g_n\}$ dans E^*. On pose alors:

$$f_k = \omega^{-1}(e_k^*)$$

où on rappelle que ω est l'isomorphisme entre E et E^* induit par la forme bilinéaire ω. Alors $\{f_1, ..., f_n\}$ est une base de L'. En effet:

- $f_k \in L'^\perp$ puisque

$$\omega(f_k, g_j) = e_k^*(g_j) = 0$$

  donc $f_k \in L'$ car L' est lagrangien,

- $\{f_1, ..., f_n\}$ est une famille libre comme image réciproque d'une famille libre par un isomorphisme.

On vérifie alors que la matrice de ω dans la base $\{e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n\}$ a la forme du théorème.

Remarque 37 *Pour prouver l'existence d'une base dans laquelle ω possède la forme du théorème, on peut également diagonaliser la matrice hermitienne iA, où A désigne la matrice antisymétrique de ω dans une base de E.*

Définition 38 *Soit E et F deux espaces vectoriels symplectiques munis de leurs formes bilinéaires τ et σ. Une application linéaire A de E dans F est dite canonique si elle transforme τ en σ, i.e.:*

$$\sigma(Ax, Ay) = \tau(x, y)$$

Exemple:
Considérons $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ muni de la forme bilinéaire canonique:

$$\omega((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) = x'_2 x_1 - x'_1 x_2$$

Alors A est un endomorphisme symplectique de E si $\det A = 1$. En effet, écrivons:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

alors:

$$\omega(Ax, Ay) = (cy_1 + dy_2)(ax_1 + bx_2) - (cx_1 + dx_2)(ay_1 + by_2) = (ad - bc)(x_1 y_2 - x_2 y_1) = (\det A)\omega(x, y)$$

Proposition 39 *Si A est une transformation canonique, alors A est injective. Les endomorphismes canoniques forment un groupe appelé groupe symplectique $Sp(E, \tau)$.*

Preuve:
Si $Ax = 0$ alors:

$$\forall y, \quad \sigma(Ax, Ay) = 0 = \tau(x, y)$$

donc $x = 0$ car τ est non dégénérée.

3.2 Variétés symplectiques.

Définition 40 *Une variété M est dite symplectique si elle est munie d'une 2-forme ω:*

- *qui donne à chaque espace tangent $T_m M$ une structure d'espace vectoriel symplectique (i.e. ω est bilinéaire et antisymétrique),*
- *si ω est fermée (i.e. $d\omega = 0$).*

Exemple fondemental:

Proposition 41 *Si X est une variété, $M = T^*X$ est muni canoniquement d'une structure de variété symplectique.*

Preuve
Soit π la projection canonique de T^*X sur X définie par:

$$\begin{cases} T^*X & \to & X \\ (x, \xi) & \to & \pi(x, \xi) = x \end{cases}$$

Cette projection est une application C^∞ donc admet une application linéaire tangente:

$$T_{(x,\xi)}\pi : T(T^*X) \to TX$$

A l'aide de cette application linéaire tangente, on définit la 1-forme canonique α sur T^*X (c'est une section de $T^*(T^*X)$) par:

$$v \in T_{(x,\xi)} T^*X \quad \to \quad \alpha(v) = \xi(T_{(x,\xi)}\pi(v)).$$

La structure symplectique de T^*X est alors donnée par la 2-forme:

$$\omega = -d\alpha$$

L'antisymétrie de ω est évidente, de même que le fait que $d\omega = 0$. Il reste à vérifier que ω est non dégénéré.

On choisit un système de coordonnées locales $(x_1, ..., x_n)$, soit $\{dx_1, ..., dx_n\}$ la base correspondante de T_x^*X, et $(\xi_1, ..., \xi_n)$ les coordonnées de la forme ξ dans cette base. Soit $v = (q, p) \in T_{(x,\xi)}T^*X$. On a:

$$\alpha(v) = \alpha(q,p) = \xi(T\pi(q,p)) = \xi(q)$$

donc:

$$\alpha_{(x,\xi)} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i dx_i$$

d'où:

$$\omega_{(x,\xi)} = -d\alpha = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge d\xi_i$$

ce qui signifie que pour deux vecteurs v et v' de $T_{(x,\xi)}T^*X$ de coordonnées (q,p) et (q',p'), on a:

$$\omega_{(x,\xi)}(\ (q,p),\ (q',p')) = \sum_{i=1}^{n}(q_i p_i' - q_i' p_i)$$

qui est la forme canonique d'une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée.

Remarque 42 *Un théorème dû à Darboux affirme que toute variété est localement un cotangent (il existe des coordonnées locales canoniques dans lesquelles ω prend la forme $\sum dx_i \wedge d\xi_i$)*

Remarque 43 *Un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$ est canoniquement orienté par la $2n$-forme $\frac{1}{n!}\omega \wedge ... \wedge \omega$ (où l'on fait le produit de n formes ω). Cette forme est en effet non nulle, il suffit de s'en assurer dans une base où ω est sous forme canonique. Donc toute variété symplectique est canoniquement orientée.*

Définition 44 *Une sous-variété Y de T^*X est dite isotrope [respectivement involutive, lagrangienne] si en chaque point $y \in Y$, l'espace tangent à Y est un sous-espace vectoriel isotrope [resp. involutif, lagrangien] de l'espace tangent à T^*X.*

Exemple de sous-variété lagrangienne de T^*X
Soit $\varphi : X \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ et:

$$\Lambda_\varphi = \{(x, d\varphi(x)), x \in X\} \quad \subset \quad T^*X$$

C'est une sous-variété de dimension n de T^*X (où n =dim$X$) qui est le graphe de $d\varphi$. La fonction φ est appelée fonction génératrice de la variété Λ.

Montrons que Λ_φ est lagrangienne. En coordonnées locales, $(q,p) \in T_{(x,d\varphi(x))}\Lambda_\varphi$ si

$$p_k = \sum_{j=1}^{n} \partial_{kj}^2 \varphi(x) q_j$$

qui est l'équation d'un sous-espace vectoriel de dimension n=dim$T^*X/2$, de plus $T_{(x,d\varphi(x))}\Lambda_\varphi$ est isotrope car:

$$\begin{aligned}
\omega(\ (q,p),\ (q',p')) &= \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge d\xi_i(\ (q,p),\ (q',p')) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(q_i p_i' - q_i' p_i) \\
&= \sum_{1 \le i,j \le n} (\partial_{ij}^2\varphi\ q_i q_j' - \partial_{ij}^2\varphi\ q_i' q_j) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Plus généralement, $Y = \{x, \beta(x)\}$ où β est une 1-forme est lagrangienne si $d\beta = 0$. Localement, une telle sous-variété est de la forme Λ_φ. En fait, pour qu'une sous-variété lagrangienne soit localement le graphe d'une différentielle de fonction, il suffit que la projection canonique restreinte à Y soit un difféomorphisme local de Y sur X.

Définition 45 *On appelle transformation canonique un difféomorphisme C^∞ qui respecte la structure symplectique. C'est-à-dire que*

$$\varphi : (X_1, \omega_1) \to (X_2, \omega_2)$$

doit vérifier $\varphi^* \omega_2 = \omega_1$.

Caractérisation:
On munit $X_1 \times X_2$ de la 2-forme $\omega_2 - \omega_1$:

$$(\omega_2 - \omega_1)(v_1 \otimes v_2, v_1' \otimes v_2') = \omega_2(v_2, v_2') - \omega_1(v_1, v_1')$$

ce qui en fait une variété symplectique. Alors φ est canonique si et seulement si le graphe Y de φ est une sous-variété lagrangienne de $X_1 \times X_2$. En effet:

$$Y = \{(x, \varphi(x)), x \in X_1\} \quad \Rightarrow \quad T_{(x,\varphi(x))}Y = \{(v, T_x\varphi.v), v \in T_xX_1\}$$

Comme Y a la dimension d'une variété lagrangienne, il suffit de vérifier que:

$$Y \text{ est isotrope si et seulement si } \varphi \text{ est canonique.}$$

Or

$$(\omega_2 - \omega_1)(\ (v, T_x\varphi v),\ (w, T_x\varphi w)) = 0$$

si et seulement si:

$$\omega_1(v, w) = \omega_2(T_x\varphi v, T_x\varphi w) = \varphi^*(\omega_2)(v, w)$$

i.e. si et seulement si $\omega_1 = \varphi^*(\omega_2)$ donc si et seulement si φ est canonique.

3.3 Systèmes hamiltoniens.

On suppose que M est une variété symplectique de la forme T^*X. Soit $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Définition 46 *Le gradient symplectique H_f de f est le vecteur défini par:*

$$i(H_f)\omega = df$$

ou encore $H_f = \omega^{-1}(df)$ (ω désigne l'isomorphisme entre TM et T^*M introduit à la proposition 33).

En coordonnées canoniques, on a:

$$H_f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

En effet, si H_f a pour coordonnées:

$$H_f = \sum q_i \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

et si $v \in T_{(x,\xi)}M$ a pour coordonnées:

$$v = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i} + V_i \frac{\partial}{\partial \xi_i},$$

comme $\omega = \sum dx_i \wedge d\xi_i$,

$$\omega(H_f, v) = \left(\sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\xi_i\right)\left(\sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}, \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} + V_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}\right)$$

donc:

$$df(v) = \sum_{i=1}^{n} q_i V_i - p_i v_i$$

d'où:

$$q_i = \frac{\partial f}{\partial \xi_i}, \quad p_i = -\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Remarque 47 *f et H_f sont appelés respectivement hamiltonien (ou énergie) et champ hamiltonien. Les trajectoires du champ hamiltonien vérifient le système d'équations:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}x & = & \partial_\xi f \\ \frac{d}{dt}\xi & = & -\partial_x f \end{array} \right. \tag{16}$$

Ces équations décrivent le mouvement de particules en mécanique classique pour des sytèmes conservatifs, x est la position de la particule et ξ est proportionnel à l'impulsion (ou quantité de mouvement).

Pour intégrer le système d'équations (16), on peut alors chercher une transformation canonique qui le simplifie (i.e. qui ramène f à une forme dite normale, par exemple on ramène localement f à ξ_1 si f n'est pas critique, où (sur $T^*\mathbb{R}$) à une fonction de $x^2+\xi^2$ si f admet un minimum non dégénéré, ...) On a en effet la:

Proposition 48 *Soit φ une transformation canonique, alors:*

$$\varphi^*(H_f) = H_{\varphi^*(f)}$$

Autrement dit, pour déterminer la trajectoire du flot hamiltonien (i.e. intégrer (16)) dans les nouvelles coordonnées, il suffit d'écrire les équations (16) en remplaçant f par son expression en fonction des nouvelles coordonnées.

Preuve:

On a:

$$\begin{array}{rcl} i(\varphi^*(H_f))\omega & = & i(\varphi^*(H_f))\varphi^*(\omega) \\ & = & \varphi^*(i(H_f)\omega) \\ & = & \varphi^* df \\ & = & d\varphi^* f \\ & = & i(H_{\varphi^* f})\omega \end{array}$$

On conclut parce que ω est non dégénérée.

Exemple: Considérons dans $T^*\mathbb{R}$ muni de $\omega = dq \wedge dp$, le hamiltonien $f = \xi^2 - x^2$. Les équations du flot hamiltonien s'écrivent:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & \xi \\ \frac{d\xi}{dt} & = & x \end{array} \right.$$

Pour les intégrer, il est nécessaire de les combiner en une équation du second ordre en x par exemple.
Effectuons plutôt la tranformation canonique:

$$x = \frac{y-\eta}{\sqrt{2}}, \quad \xi = \frac{y+\eta}{\sqrt{2}}$$

qui est canonique car linéaire de déterminant 1. Le hamiltonien s'écrit dans les nouvelles coordonnées, $f = 2y\eta$. L'équation du flot devient donc:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dy}{dt} & = & 2y \\ \frac{d\eta}{dt} & = & 2\eta \end{array} \right.$$

on a découplé le système en deux équations du premier ordre ce qui est beaucoup plus agréable (même si dans cet exemple précis, on sait résoudre explicitement les deux systèmes).
Trouver une bonne transformation canonique est souvent profitable non seulement en mécanique classique mais aussi en mécanique quantique.

Proposition 49 *Soit φ_t le groupe de difféomorphisme à un paramètre associé à un champ hamiltonien H_f. Alors φ_t est une transformation canonique:*

$$\varphi_t^*(\omega) = \omega$$

Preuve:
Commençons par déterminer la dérivée en $t = 0$ de $\varphi_t^*(\omega)$:

$$\frac{d}{dt}[\varphi_t^*(\omega)]_{|t=0} = \mathcal{L}_{H_f}(\omega) = i(H_f)d\omega + d(i(H_f)\omega)$$

d'après la formule de Cartan (14), puis on applique $d\omega = 0$ (car M symplectique) et

$$d(i(H_f)\omega) = d(df \circ \varphi_t) = 0$$

ce qui donne:

$$\mathcal{L}_{H_f}(\omega) = 0 \tag{17}$$

On en déduit que $\varphi_t^*(\omega) = \omega$. En effet, le système différentiel:

$$\varphi_t^*(\omega)_{|t=0} = \omega, \quad \frac{d}{dt}\varphi_t^*(\omega) = \mathcal{L}_{H_f}(\varphi_t^*(\omega))$$

admet une solution unique et l'équation (17) montre que ω est solution.

On en déduit immédiatement la:

Proposition 50 *Le flot φ_t conserve le volume:*

$$\varphi_t^*(\Omega) = \Omega \text{ où } \Omega = \frac{1}{n!}\omega \wedge \ldots \wedge \omega$$

(On peut donc appliquer le théorème de retour de Poincaré au flot φ_t).

On remarque également que:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \varphi_t) = \mathcal{L}_{H_f}(f) = df(H_f) = \omega(H_f, H_f) = 0$$

d'où la:

Proposition 51 *L'énergie est conservée le long des trajectoires du champ hamiltonien:*

$$f \circ \varphi_t = f.$$

3.4 Crochet de Poisson.

Définition 52 *Soit f et g deux applications de $C^\infty(M, \mathbb{R})$. On définit le crochet de Poisson de f et g par:*

$$\{f, g\} = H_f(g) = -H_g(f) = dg(H_f) = -df(H_g) = -\omega(H_f, H_g)$$

Remarque 53 *Si le crochet de Poisson de f et g est nul, alors g est conservé le long des trajectoires du flot hamiltonien de f (la preuve est identique à celle de la proposition 51). Plus on a de constantes du mouvement, plus il est facile de décrire le flot hamiltonien.*

Par exemple, en dimension 1, savoir que le hamiltonien lui-même est conservé permet de dire que les courbes intégrales du flot se confondent avec les lignes de niveau du hamiltonien. Donnons un autre exemple en dimension 2. Supposons que le hamiltonien f est invariant par rotation, par exemple prenons:

$$f(x, y, \xi, \eta) = h(\xi^2 + \eta^2) + V(x^2 + y^2).$$

Alors, on a $\partial_\theta f = 0$, et comme

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

la partie du crochet de Poisson de f et de $g(x, y, \xi, \eta) = x\eta - y\xi$ où l'ondérive f par rapport à x et y est nulle. On s'aperçoit alors que la deuxième partie (celle où on dérive f par rapport à ξ et η) est également nulle, on en déduit la conservation de g, c'est-à-dire la conservation du moment cinétique.

Proposition 54 *Le crochet de Poisson est bilinéaire, antisymétrique et vérifie l'identité de Jacobi:*

$$\{\ \{f,g\},h\} + \{\ \{g,h\},f\} + \{\ \{h,f\},g\} = 0$$

Les deux premières propriétés sont évidentes, montrons la troisième. On a:

$$\begin{aligned}
\{\ \{f,g\},h\} &= H_{\{f,g\}}(h), \\
\{\ \{g,h\},f\} &= -H_f(\{g,h\}) = -H_f(H_g(h)), \\
\{\ \{h,f\},g\} &= -H_g(\{h,f\}) = H_g(H_f(h))
\end{aligned}$$

on est ramené à montrer que:

$$H_{\{f,g\}}(h) - H_f H_g(h) + H_g H_f(h) = 0$$

ou encore que:

$$H_{\{f,g\}} = [H_f, H_g]$$

Preuve:
On effectue la dérivée de Lie par rapport à H_f de l'identité

$$dg = i(H_g)\omega$$

ce qui donne pour le membre de gauche:

$$\mathcal{L}_{H_f} dg = d(\mathcal{L}_{H_f} g) = d(H_f(g)) = d\{f,g\} = i(H_{\{f,g\}})\omega$$

et pour le membre de droite, en appliquant (15):

$$\mathcal{L}_{H_f}(i(H_g)f) = i(H_g)(\mathcal{L}_{H_f}(\omega)) + i([H_f, H_g])\omega = i([H_f, H_g])\omega$$

d'après (17) d'où:

$$i(H_{\{f,g\}})\omega = i([H_f, H_g])\omega$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remerciements.

Je remercie Yves Laurent de m'avoir proposé de donner ce cours, Frédéric Faure pour ses suggestions (en particulier la visualisation du dual d'un espace vectoriel) et Laurent Stolovitch pour sa patiente relecture de ces notes.

Références

[1] V. I. Arnold. *Méthodes mathématiques de la mécanique classique.* Mir (Moscou), 1976.

[2] M. Berger and B. Gostiaux. *Géométrie différentielle.* Armand Colin, 1972.

[3] Y. Colin de Verdière. *Géométrie symplectique.* Cours de DEA (Institut Fourier), 1982/83.

[4] J. Dieudonné. *Éléments d'analyse (III).* Gauthier-Villars, 1970.

[5] J. Duistermaat. *Fourier integral operators.* Courant Institut (polycopié), 1973.

[6] H. Flanders. *Differential forms with applications to the physical science.* Academic Press, 1963.

[7] V. Guillemin and S. Sternberg. *Symplectic technics in physics.* Cambridge University, 1990.

[8] D. Leborgne. *Calcul différentiel et géométrie.* PUF, 1982.

[9] J. Lelong-Ferrand. *Géométrie différentielle (tenseurs, formes différentielles).* Masson, 1963.

[10] Pham Mau Quam. *Introduction à la géométrie des variétés différentiables.* Dunod, 1969.

[11] S. Sternberg. *Lectures on Differential geometry.* Prentice Hall, 1964.

[12] R. Wald. *General Relativity.* University of Chicago Press, 1984.

[13] A. Weinstein. Lectures on symplectic manifolds. *Regional conf. series in Math.*, 29, 1977.