UGA Mat406 2024

Examen du 27 juin, 15h-17h.

Documents interdits à l'exception d'une feuille manuscrite A4 recto-verso. Calculatrice autorisée.
Téléphones portables, ordinateurs, ... interdits.
On pourra justifier le résultat de tout calcul fait à la calculatrice en indiquant sur la copie la commande utilisée.
Ce sujet comporte deux pages (barême indicatif non contractuel : 8, 4, 8).

1 Point fixe et Newton

Soit $y \in [-\pi, \pi]$ et $a \in [0,1[$. On souhaite résoudre l'équation

$$(E) \quad x - a\sin(x) = y$$

1. Soit $f(x) = y + a\sin(x)$. Montrer que la fonction f vérifie les hypothèses du théorème du point fixe sur l'intervalle $I = [y-a, y+a]$.
2. Déterminer en fonction de a le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une valeur approchée de x à ε près, pour $\varepsilon > 0$.
3. Pour quelles valeurs de a cette méthode est-elle plus efficace qu'une résolution par dichotomie ?
4. Soit $g(x) = x - a\sin(x) - y$. Donner la suite (u_n) de la méthode de Newton appliquée à la résolution de $g(x) = 0$.
5. On suppose que $a = 0.5$ et $y = \pi/2$. Déterminer une valeur initiale u_0 pour laquelle on peut démontrer la convergence de la suite.
6. Comparer la vitesse de convergence de la méthode du point fixe et de la méthode de Newton pour ces valeurs de a et y.

2 Intégration approchée

Déterminer une valeur approchée de

$$\int_0^1 \exp(-x^2)\, dx$$

en appliquant la méthode du point milieu avec $N = 10$ subdivisions. Donner et justifier une majoration de l'erreur commise.

3 Précision du logarithme

Soit x un réel positif proche de 0, pour les calculs approchés on prendra pour valeur de x le flottant `1/3*1e-7`. On pose $y = 1 + x$. On supposera que les flottants sont représentés sur la calculatrice en base 2 avec une mantisse de 48 bits.

1. Déterminer à la calculatrice une valeur approchée $\hat{y}$ de y en effectuant le calcul en approché, puis déterminer une valeur approchée de $\ln(\hat{y})$ que l'on notera l_1.
2. Donner une majoration de l'erreur relative sur $\hat{y} - 1$. On supposera dans la suite que l'erreur relative sur le calcul fait par la machine de $\ln(\hat{y})$. est proche de celle sur $\hat{y} - 1$.
3. Donner le développement de Taylor à l'ordre 2 $T_2(x)$ de $\ln(1+x)$ en $x = 0$. Déterminer à la calculatrice la valeur l_2 de $T_2(x)$.
4. Donner une majoration de l'erreur absolue $|\ln(1+x) - T_2(x)|$ pour $x \in [0,1[$, puis une estimation de l'erreur relative.
5. Parmi les deux valeurs l_1 et l_2, quelle est celle qui donne l'approximation la meilleure de $\ln(1+x)$? Justifier en estimant l'erreur relative sur l_1 et l_2 et en comparant.
6. Est-ce utile de faire un développement à l'ordre 3 pour augmenter la précision du résultat pour cette valeur de x ?