

Examen du 28 juin 2024, de 8h à 10h.

*Calculatrices et résumé de cours manuscrit format A4 recto-verso autorisé. Autres documents et portables interdits. Le barème est indicatif.*

### 1. COURBE POLAIRE (10 POINTS)

On considère la courbe  $C$  dont l'équation polaire est

$$r(\theta) = \frac{1}{1 + 2\sin(\theta)}, \quad \theta \in ]-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}[$$

- (1) Déterminer  $r(\pi - \theta)$  en fonction de  $r(\theta)$ , en déduire qu'on peut réduire l'intervalle d'étude à  $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$  et donner la symétrie correspondante.
- (2) Faire l'étude de la courbe : domaine de définition, étude des asymptotes, tableau de variation.
- (3) Tracer la courbe. Y-a-t'il des points d'inflexion ?
- (4) Déterminer la longueur de l'arc de courbe situé entre les points de paramètres  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi/2$  sous forme d'une intégrale dont on ne cherchera pas à déterminer une valeur exacte. Donner une valeur approchée de cette longueur à l'aide de la calculatrice.
- (5) Déterminer les points de la courbe situés sur l'axe  $Ox$  (tels que  $y = 0$ ).
- (6) Déterminer l'aire délimitée par la courbe et l'axe  $Ox$ .
- (7) Déterminer le repère de Frénet au point de paramètre  $\theta$ , tracer le repère au point de paramètre  $\theta = 0$ .
- (8) *Bonus* Déterminer la courbure en  $\theta = 0$ , et tracer le cercle osculateur en ce point.

### 2. SYSTÈME DIFFÉRENTIEL, ETC. (10 POINTS)

On considère  $a$  un réel, la matrice identité  $I_2$  de taille 2, et la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- (1) Déterminer les valeurs propres et des vecteurs propres de  $A$ . Vérifier qu'ils sont encore vecteurs propres de  $A + aI_2$ , quelles sont les valeurs propres correspondantes ?
- (2) Résoudre le système linéaire

$$\frac{dY}{dt} = (A + aI_2)Y, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (3) Discuter en fonction de la valeur de  $a$  si  $Y(t)$  reste borné au voisinage de  $t \rightarrow +\infty$ .
- (4) On suppose dorénavant que  $a = -5$ , on pose  $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  Faire l'étude la courbe paramétrée  $(x(t), y(t))$  et tracer la courbe solution.
- (5) Déterminer la valeur de  $\int_{\gamma} x dy$  où  $\gamma$  est l'arc de courbe précédent entre les points de paramètres  $t = 0$  et  $t = 1$ .