Algèbre et Géométrie 23-09-09 et 07-10-09 Marcel Morales

E désignera un $K-$espace vectoriel de dimension finie.
Rappels:

- Ne pas confondre F sev propre($F \neq 0, F \neq E$), et sev propre de l'endomorphisme u (associé à une valeur propre de u).
- Rappeler la Division euclidienne dans $K[X]$.
- Rappeler le Théorème de Bezout dans $K[X]$.
- $K[X]$ est un anneau intègre a factorisation unique.
- Tout idéal de $K[X]$ est principal.
- Décrire les éléments irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$

Soit $P \in K[X]$ et u est un endomorphisme de E. Si $P(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + ... + a_n$ on pose $P(u) = a_0u^n + a_1u^{n-1} + ... + a_nI$, c'est un endomorphisme de E.

1. Vérifier que l'application $K[X] \longrightarrow End_K(E)$ qui à P associe $P(u)$ est un morphisme de $K-$algèbres.
2. Si $P, Q \in K[X]$ et u est un endomorphisme de E montrer que $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$, en particulier l'ensemble $\{P(u) \mid P \in K[X]\}$ est une sous algèbre commutative de $End_K(E)$,
3. Vérifier que pour tout polynôme $P(X)$ l'espace vectoriel $\ker(P(u))$ est invariant par u.

Démontrer les théorèmes suivants:

Théorème 0.1 *Lemme des noyaux: Si $P(X) = Q_1(X)Q_2(X)$ et $Q_1(X), Q_2(X)$ sont premiers entre eux alors*

$$\text{Ker } P(u) = \text{Ker } Q_1(u) \oplus \text{Ker } Q_2(u)$$

De plus le projecteur p_k : Ker $P(u) \to$ Ker $Q_k(u)$ associé est l'endomorphisme induit sur Ker $P(u)$ par un polynôme en u.

Indication: Utiliser le théorème de Bézout.

Exemple 1 *Soit $E := \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ le $\mathbb{R}-$espace vetoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, et $\mathcal{S}$ le sous espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle:*

$$(ED) \qquad f^{(p)} + \alpha_{p-1}f^{(p-1)} + ... + \alpha_1 f' + \alpha_0 f$$

où $\alpha_0, ..., \alpha_{p-1} \in \mathbb{C}$. On apelle polynôme charactéristique de cette équation diff. le polynôme:

$$C(X) = X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + ... + \alpha_0$$

que l'on suppose factorisé dans $\mathbb{C}$ par

$$C(x) = \prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)^{p_k}.$$

1. *Montrer par récurrence que pour tout entier $s \geq 1$, tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $f \in E$, nous avons*
$$(D - \lambda Id_E)^s(f(x)e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}D^s(f)(x),$$
où D désigne l'endomorphisme de dérivation de E.
2. *En déduire que si $g \in \ker(D - \lambda_k Id_E)^s$ alors $g = P(x)e^{\lambda_k x}$ où P est une fonction polynôme de degré au plus $s - 1$.*
3. *En déduire que*
$$\ker(D - \lambda_k Id_E)^{p_k} = \{P(x)e^{\lambda_k x} \mid P \in \mathbb{C}_{p_k-1}[X]\}.$$

4. Monter que tout $f \in \mathcal{S}$ s'écrit sous la forme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{r} P_k(x) e^{\lambda_k x}$$

pour une famille unique de polynômes , $P_k \in \mathbb{C}_{p_k - 1}[X]$. En particulier $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S} = p$.

Théorème 0.2 *Le polynôme caractéristique χ_u est scindé dans K si et seulement si u est triangularisable.*

Indication: La preuve de l'implication $\Rightarrow$ se fait par récurrence sur $n = \dim E$:
Soit λ une racine du polynôme caractéristique, alors $\dim(Im(u - \lambda I_E)) \leq n - 1$.
Soit F un sous e.v. de E contenant $Im(u - \lambda I_E)$ et tel que $\dim F = n - 1$. Vérifier que F est invariant par u. Choisir une base de F et la compléter à une base B de E, écrire la matrice de u dans la base B et calculer son polynôme caractéristique, en particulier établir que $\chi_{u|_F}$ est scindé dans K. Terminer la preuve.

Théorème 0.3 *Montrer que si χ_u est scindé dans K, alors $\chi_u(u) = 0$.*

Indication: Nous pouvons supposer qu'il existe une base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ de E tel que la matrice de u dans cette base est triangulaire supérieure, i.e.

$$u(v_i) = \sum_{j=1}^{i} \alpha_{j,i} v_j$$

avec $\alpha_{i,i} = \lambda_i$ pour tout i.
Montrer par récurrence sur i que

$$[\prod_{j=1}^{i} (u - \lambda_j I_E)](v_k) = 0, \forall k = 1, ..., i.$$

Par conséquent nous avons le théorème:

Théorème 0.4 *(Cayley-Hamilton)*
- *Si $K = \mathbb{C}$ alors tout endomorphisme de E est triangularisable et $\chi_u(u) = 0$.*
- *Si $K = \mathbb{R}$ alors $\chi_u(u) = 0$.*

Définition 0.1 *L'ensemble $\{P \in K[X] \text{tel que } P(u) = 0\}$ est un idéal non nul de $K[X]$. Son générateur (unitaire) est appelé le polynôme minimal de u et noté μ_u.*

Soit u un endomorphisme réel, par le choix d'une base et la matrice M de u dans cette base on peut définir un morphisme complexe $\tilde{u}$ ayant la même matrice M dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, d'où $\chi_u(X) = \chi_{\tilde{u}}(X)$ et $\mu_u(X) = \mu_{\tilde{u}}(X)$. Les deux polynômes $\chi_u(X), \mu_u(X)$ sont à coefficients réels, ce qui montre que le polynôme $\chi_u(X)$, (resp. $\mu_u(X)$) ne dépend pas du corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exemple: Soit $e_1, ..., e_n$ une base du $\mathbb{C}-$espace vectoriel E. et u l'endomophisme de E défini par

$$u(e_1) = 0,\ u(e_2) = e_1, ...,\ u(e_n) = e_{n-1}$$

Calculer $\chi_u(X), \mu_u(X)$.

Revenons au cas général:

- On suppose $K = \mathbb{C}$. Montrer que le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.
- Démontrer que si λ est une racine de $\chi_u(X)$ alors $\mu_u(X)$ est divisible par $X - \lambda$.
- Conclure que si $\chi_u(X)$ est scindé et
  $\chi_u(X) = (X - \lambda_1)^{n_1}(X - \lambda_2)^{n_2}...(X - \lambda_k)^{n_k}$ est la décomposition en facteurs irréductibles de $\chi_u(X)$ ($m_i > 0$ pour tout i) alors $\mu_u(X) = (X - \lambda_1)^{m_1}(X - \lambda_2)^{m_2}...(X - \lambda_k)^{m_k}$ est la décomposition en facteurs irréductibles de $\mu_u(X)$ avec $0 < m_i \leq n_i$ pour tout i.
- Si $M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$ alors $\chi_M(X) = \chi_{M_1}(X)\chi_{M_2}(X)$ et $\mu_M(X) = \text{ppcm}\{\mu_{M_1}(X), \mu_{M_2}(X)\}$

Exemple: Définir des endomorphisme $u_k, k = 1, ..., 4$ tel que $\chi_{u_k}(X) = (X-i)^4(X-2)^2$ et $\chi_{u_k}(X) = (X-i)^k(X-2)$.

Montrer que :

Théorème 0.5 *Si $\chi_u(X)$ est scindé et $\chi_u(X) = (X-\lambda_1)^{n_1}(X-\lambda_2)^{n_2}...(X-\lambda_k)^{n_k}$ est la décomposition en facteurs irréductibles de $\chi_u(X)$, les sev $\ker(u-\lambda_i\ Id)^{m_i}$ sont appelés les sous espace spectraux de u. Soit $F_i = \ker(u-\lambda_i I_E)^{m_i}$. Alors F_i est invariant par u et*

- $E = F_1 \oplus ... \oplus F_k$
- *Soit u_i la restriction de u à F_i. Alors le polynôme minimal de u_i est $(X-\lambda_i)^{m_i}$ et le polynôme caractéristique de u_i est $(X-\lambda_i)^{n_i}$. En particulier $\dim(F_i) = n_i$ pour tout i.*
- *L'endomorphisme u_i est de la forme $u_i = \lambda_i Id_{F_i} + n_i$, où n_i est un endomorphisme nilpotent.*

Exemple. Dans cet exemple $K = \mathbb{R}$, ou $K = \mathbb{C}$. Soit $u : K^4 \longrightarrow K^4$ défini dans la base canonique par la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 & -a \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer χ_u, μ_u, déterminer pour quelles valeurs de a la matrice est diagonalisable.

Réponse: $\chi_u(t) = t^4 - 2t^3 + t^2 - ta = t(t^3 - 2t^2 + t - a)$

Si $a = 0$ alors $\chi_u(t) = t^2(t-1)^2$. Nous avons que

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $M - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $M(M-I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ Ce qui montre que $t(t-1)$, n'est pas le polynôme minimal de u.

Si $a \neq 0$, alors il faut chercher les racines doubles de $t^3 - 2t^2 + t - a$, il y a une racine double si et seulement si $a = 0$ ou $a = 4/27$

Dans le cas où $a = 4/27$, nous avons $t^3 - 2t^2 + t - 4/27 = (t-1/3)^2(t-4/3)$, donc $\chi_u(t) = t(t-1/3)^2(t-4/3)$, il faut calculer

$$M(M-1/3I)(M-4/3I) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4/27 & 1 & 1 & -4/27 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 4/27 & 2/3 & 1 & -4/27 \\ -1 & 1 & -1/3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4/3 & 1 & 0 & 0 \\ 4/27 & -1/3 & 1 & -4/27 \\ -1 & 1 & -4/3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -77/81 & 7/9 & -14/27 & 77/81 \\ 10795 & 7/27 & -14/81 & -10795 \\ 22/81 & -2/9 & 4/27 & -22/81 \\ -44/81 & 4/9 & -8/27 & 44/81 \end{pmatrix}$$

qui prouve que la matrice M n'est pas diagonalisable.

Si $a \neq 0, 4/27$, alors $\chi_u(t) = t(t^3 - 2t^2 + t - a)$ a une racine réelle et deux racines complexes non réelles. (Faire l'étude de la fonction $t \to t^3 - 2t^2 + t - a$). ce qui prouve que dans ce cas M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, mais pas dans $\mathbb{R}$.

Montrer le :

Théorème 0.6 *u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et μ_u a toutes ses racines simples.*

Si $F \subset E$ est une sev stable par u alors μ_{u_1} divise μ_u oú u_1 est la restriction de u á F. En particulier si u est triangularisable alors u_1 est triangularisable. Si u est diagonalisable alors u_1 est diagonalisable

Théorème 0.7 *Décomposition de Dunford.- Si $\chi_u(X)$ est scindé et $\chi_u(X) = (X-\lambda_1)^{n_1}(X-\lambda_2)^{n_2}...(X-\lambda_k)^{n_k}$ est la décomposition en facteurs irréductibles de $\chi_u(X)$, il existe un unique couple (d, n) formé d'un endomorphisme diagonalisable et d'un morphisme nilpotent tel que*

$$u = d + n, \text{ et } d \circ n = n \circ d.$$

De plus, ces endomorphismes sont des polynômes en u.

Indication. Soient $p_{\lambda_1}, ..., p_{\lambda_k}$ les projecteurs spectraux. On pose $d = \lambda_1 p_{\lambda_1} + ... + \lambda_k p_{\lambda_k}$. Vérifier que d est diagonalisable et que c'est un polynôme en u.

Pour l'unicité si $u = d + n = d' + n'$, alors $d' - d = n - n'$ montrer que $n - n'$ est nilpotent.

Un algorithme pour écrire la matrice de u en blocs de Jordan.

premier cas Soit u un endomorphisme nilpotent.

a) On suppose que $\mu_u(X) = X^k$ avec $k > 1$.

b) Démontrer que

$$0 = \text{Ker } u^0 \subset \text{Ker } u^1 \subset ... \subset \text{Ker } u^{k-1} \subset \text{Ker } u^k = E.$$

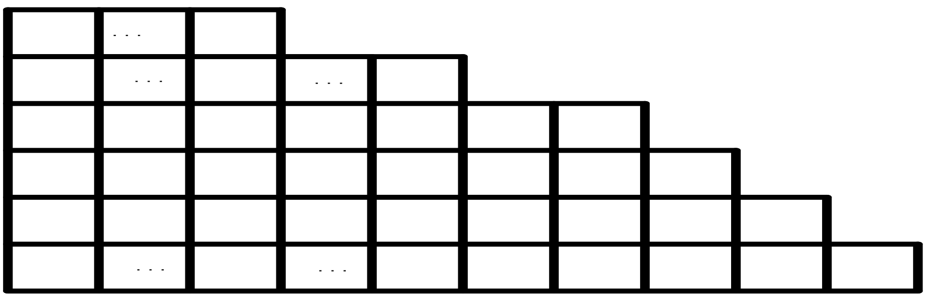
On notera $n_i = \dim \text{Ker } u^i - \dim \text{Ker } u^{i-1}$.

c) Montrer que $\text{Ker } u^k \neq \text{Ker } u^{k-1}$, d'où $n_k > 0$.

d) Soit $F_k \subset \text{Ker } u^k$ un sev tel que $\text{Ker } u^k = \text{Ker } u^{k-1} \oplus F_k$,

1. montrer que si $\{e_1^k, ..., e_{n_k}^k\}$ est une base de F_k alors il existe un sev F_{k-1} tel que $\text{Ker } u^{k-1} = \text{Ker } u^{k-2} \oplus F_{k-1}$ et une base de F_{k-1} de la forme $\{u(e_1^k), ..., u(e_{n_k}^k), e_1^{k-1}, ..., e_{q_k}^{k-1}\}$, en particulier $n_k \geq n_{k-1} > 0$.
2. Montrer par récurrence descendente que si $\{v_1^i, ..., v_{n_i}^i\}$ est une base de F_i alors il existe un sev F_{i-1} tel que $\text{Ker } u^{i-1} = \text{Ker } u^{i-2} \oplus F_{i-1}$ et une base de F_{i-1} de la forme $\{u(v_1^i), ..., u(v_{n_i}^i), e_1^{i-1}, ..., e_{q_i}^{i-1}\}$. En particulier $n_i \geq n_{i-1} > 0$ pour tout $i \leq k$.

e) Faire un tableau, dans la $i+1$ème ligne on mettra la base de F_{k-i} et dans une colonne un élément est l'image de l' élément situé au dessus.



f) Vérifier que $\dim E = n_k + ... + n_1$. Soit E_i le sev engendré par les vecteurs de la $i-$ème colonne, vérifier que E_i est invariant par u et que $E = \oplus_i E_i$. Écrire la matrice de la restriction de u à E_i.

g) Montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E, dans laquelle la matrice de u est de la forme:

$$Mat(u, B) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_s \end{pmatrix}$$

où A_i est une matrice carrée $k_i \times k_i$, $k = k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_s$ et

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Deuxième cas On suppose que $\mu_u(X) = (X - \lambda)^k$. Montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E, dans laquelle la matrice de u est de la forme:

$$Mat(u, B) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_s \end{pmatrix}$$

où A_i est une matrice carrée $k_i \times k_i$, $k = k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_s$ et

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

(Écriture en blocs de Jordan)

Exemple 2 *Dans cet exemple $K = I\!R$, ou $K = \mathbb{C}$. Soit u un endomorphisme tel que $\mu_u(X) = X^2$, écrire la matrice de u sous forme de blocs de Jordan.*

la matrice de u est de la forme:

$$Mat(u, B) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_s \end{pmatrix}$$

où A_i est une matrice carrée $k_i \times k_i$, $2 = k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_s$ et $A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, si $k_i = 2$, et $A_i = (\, 0 \,)$, si $k_i = 1$

Exemple 3 *Dans cet exemple $K = I\!R$, ou $K = \mathbb{C}$. Soit $u : K^4 \longrightarrow K^4$ défini dans la base canonique par la matrice :*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer χ_u, μ_u et déterminer une base de K^4 dans laquelle u s'écrira:

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons déjà vu que $\chi_u = t^2(t-1)^2$ et que $M(M-I) \neq 0$. Nous avons:

$M^2(M-I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M(M-I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui prouve que

$\mu_u(t) = \chi_u = t^2(t-1)^2$. D'autre part: $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(M-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Nous calculons $\ker u^2 = Vect\{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

et $\ker(u-I)^2 = Vect\{w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u(w_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

3) Dans cet exercice $K = I\!R$, ou $K = \mathbb{C}$.

a) Montrer qu'il existe un entier naturel α et un polynôme $P(X)$, avec $P(0) \neq 0$ tels que:

$$E = \text{Ker } u^\alpha \oplus \text{Ker } P(u)$$

Considérer les cas particuliers.

Solution: Un polynôme a la racine 0 ou pas, si 0 est une racine de χ_u avec la multiplicité α nous pouvons écrire $\chi_u(X) = X^\alpha P(X)$ avec $P(0) \neq 0$. Remarquez que si 0 n'es pas racine de $\chi_u(X)$ alors u est injective, et comme on est en dimension finie u est bijective. On trouve le résultat par le lemme des noyaux. De même si $\chi_u(X) = X^\alpha$ alors u est nilpotent.

b) On pose $E_1 = \text{Ker } u^\alpha$ et u_1 la restriction de u à E_1. Justifier l'existence d'une base $\mathcal{B}_1$ de E_1 tel que la matrice de u_1 dans la base $\mathcal{B}_1$ est triangulaire avec des zéros sur la diagonale, on note cette matrice M_1.

Solution: Dans ce cas $\chi_{u_1}(X) = X^\alpha$, c'est un polynôme scindé ayant une seule racine 0, il est donc triangularisable sur K et il existe une base $\mathcal{B}_1$ de E_1 tel que la matrice de u_1 dans la base $\mathcal{B}_1$ est triangulaire avec des zéros sur la diagonale.

c) Déterminer une base convenable de E, on pose M la matrice de u dans cette base et $n = \dim(E)$. Définir une application continue $\phi : K \longrightarrow K^{n^2}$ tel que

$$\phi(0) = M, \phi(t) \in \text{GL}(n), \text{pour tout } t \neq 0.$$

Solution: Soit $\mathcal{B}_2$ base de Ker $P(u)$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Notons M_2 la matrice de $u\,|_{\text{Ker } P(u)}$ dans la base $\mathcal{B}_2$. La matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$ sera $M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$. Remarquez que $\chi_M(X) = X^r \chi_{M_2}(X)$ avec $r = \text{card}\mathcal{B}_1$, et comme M_2 est bijective $\chi_{M_2}(0) \neq 0$, il en suit que $r = \alpha$.

On pose

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} M_1 + tI_\alpha & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

Remarquez que ϕ est continue, $\det \phi(t) = t^\alpha \det M_2 \neq 0$ pour $t \neq 0$, et

$$\phi(0) = M, \phi(t) \in \text{GL}(n), \text{pour tout } t \neq 0.$$

Si $\alpha = 0$, ϕ est constante.

d) Montrer que $GL(E)$ est dense dans $\mathcal{L}(E)$.

Solution: On prend u un endomorphisme non bijectif, d'aprés la question précédente il existe une application continue $\phi : K \longrightarrow K^{n^2}$ tel que

$$\phi(0) = M, \phi(t) \in \text{GL}(n), \text{pour tout } t \neq 0.$$

Par définition de la continuité , pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $\mid t \mid < \delta$ alors $\| \phi(t) - \phi(0) \| < \epsilon$, cela signifie que dans toute boule de centre u et de rayon ϵ il y a une infinité de morphismes bijectifs.

5) Endomorphismes normaux, hermitiens, unitaires. Dans cet exercice $K = \mathbb{R}$, ou $K = \mathbb{C}$ et E est soit un espace hermitien ou un espace euclidien et u un endomorphime de E. Pour fixer le problème nous supposerons $K = \mathbb{C}$.

Rappelons que:

- L'adjoint u^* de u est l'unique morphisme tel que: $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$ et si B est une base orthonormée de E, alors $M_B(u^*) =^t \overline{M_B(u)}$.
- $(u+v)^* = u^* + v^*$, $(uv)^* = v^* u^*$ et $P(u)^* = P(u^*)$. $\chi_{u^*}(X) = \overline{\chi_u(X)}$ et $\lambda \in Spec(u) \Longleftrightarrow \overline{\lambda} \in Spec(u^*)$.
- u est normal si et seulement si $uu^* = u^* u$.
- u est hermitien si et seulement si $u = u^*$.
- u est unitaire si et seulement si $uu^* = u^* u = I$.
- Si $uv = vu$ alors pour tous polynômes $P(X), Q(X)$ on a $P(u)Q(v) = Q(v)P(u)$. Si u est normal alors $P(u)$ est normal pour tout polynôme $P(X)$. De même si Si u est hermitien alors $P(u)$ est hermitien pour tout polynôme $P(X)$.

Exemple 4 • *Montrer que si u est diagonalisable dans une BON alors u est normal.*

• *Montrer que si u est diagonalisable dans une BON et ses valeurs propres sont des nombres réels, alors u est hermitien.*

a) Soit u un endomorphisme hermitien et $\mu_u = \prod_{i\in J}(X-\lambda_i)^{m_i}$ son polynôme minimal. On pose $m = max_{i\in J} m_i$ et $q(X) = \prod_{i\in J}(X - \lambda_i)$

Montrer que

i) $q^m(u) = 0$ et $q^k(u)$ est hermitien pour tout entier naturel k,

ii) $q(u) = 0$ par récurrence descendante,

iii) u est diagonalisable dans une base orthonomée et ses valeurs propres sont réelles.

aide: q est scindé et ses racines sont simples donc u est diagonalisable. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_s$ les valeurs propres de u et $E_1, ..., E_s$ les espaces propres de u correspondants. Pour montrer que $\lambda_i \in \mathbb{R}$ prendre $x \in E_i$non nul, alors $\langle \lambda_i x, x\rangle = \langle ux, x\rangle = ...$

Pour avoir une base orthonormée de vecteurs propres il suffira de vérifier que si $x \in E_i$ et $y \in E_j$ avec $i \neq j$ alors $\langle x, y\rangle = 0$, or $u(x) = \lambda_i x, u(y) = \lambda_j y$ on aura:

$$\lambda_i\langle x, y\rangle = \lambda_j\langle x, y\rangle$$

d'où $\langle x, y\rangle = 0$.

b) Considérons u, v deux endomorphismes de E. Montrer que si u, v sont diagonalisables et $uv = vu$ alors u et v diagonalisent simultanément. En particulier si u, v sont hermitiens et $uv = vu$ ils diagonalisent simultanément sur une base orthonormée.

aide: Puisque u est diagonalisable E est somme directe de ses sous espaces propres pour u, montrer que si E_i est un sev propre de u correspondant a la valeur propre λ_i alors E_i est stable par v. En effet soit $x \in E_i$ alors $u(v(x)) = v(u(x)) = \lambda_i v(x)$ donc $v(x) \in E_i$. Et la restriction de v à E_i est diagonalisable. Pour terminer on diagonalise v sur chaque espace propre de u,et on aura diagonalisé v sur E. A compléter dans le cas orthonormé.

c) Soit u normal on pose

$$u_1 = \frac{u + u^*}{2}, u_2 = \frac{u - u^*}{2i}$$

Montrer que u_1, u_2 sont hermitiens, $u_1u_2 = u_2u_1$ et $u = u_1 + iu_2$. Conclure que u est diagonalisable. Traiter les cas particuliers o'ù $M_B u$ est symétrique ou antisymétrique.

aide: c'est une vérification , utiliser la question précedente.

Conséquence importante (cas $K = \mathbb{C}$): u est normal si et seulement si u se diagonalise dans une BON.

d) On suppose $K = \mathbb{R}$.

d-1) Montrer que u est un endomorphisme hermitien si u est un endomorphisme symétrique, i.e. sa matrice M est symétrique dans une base orthonormée. Montrer que u se diagonalise dans une BON.

aide: Soit l'endomorphisme $\tilde{u} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par M alors il est clair que $\tilde{u}$ est hermitien et donc son polynôme minimal est scindé, toutes ses racines sont réelles de multiplicité 1, or $m_u(X) = m_{\tilde{u}}(X)$, ce qui prouve que u est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$) , pour montrer que les espaces propres sont orthogonaux entre eux on repète la demonstration donnée en a).

d-2) Montrer que u est unitaire si et seulement si u est une transformation orthogonale de l'espace euclidien E, i.e. $\langle u(v), u(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ pout tout $v, w \in E$.

d-3) Soit q une forme quadratique à coefficients dans $\mathbb{R}$, montrer qu'il existe une BON tel que $q(v) = \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_n x_n^2$, avec x_i la composante du vecteur v dans cette BON et $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

d-4) Montrer que si u est normal alors il existe une BON telle que la matrice de u dans cette base est formée par des blocs de taille ≤ 2. chaque bloc de taille deux étant de la forme:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ et } \lambda = a + ib \in Spec(\tilde{u})$$

aide: Dans le cas réel, si u est normal par complexification de u, on montre que $\tilde{u}$ est normal et donc son polynôme minimal est scindé, toutes ses racines sont de multiplicité 1, si $\tilde{u}(x) = \lambda x$, λ est non réel, et $\tilde{u}(\bar{x}) = \bar{\lambda}\bar{x}$ alors $y_1 = (x + \bar{x})/2, y_2 = (x - \bar{x})/(2i)$ sont des vecteur réels non nuls orthogonaux et

$u(y_1) = ay_1 - by_2, u(y_2) = by_1 + ay_2$ avec $\lambda = a + ib$. Donc la matrice de u dans une BON par des blocs de taille ≤ 2. chaque bloc de taille deux étant de la forme:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ et } \lambda = a + ib \in Spec(\tilde{u})$$

e) ici $K = \mathbb{C}$. Montrer que si u est normal alors $u^* = P(u)$, où P est un polynôme.

aide: Indication utiliser le polynôme de Lagrange P tel que $P(\lambda_i) = \overline{\lambda_i}$. et faire un calcul matriciel par blocs.

f) ici $K = \mathbb{C}$. Montrer que si u est unitaire alors u est diagonalisable dans une base orthonormée et ses valeurs propres ont module 1.

aide: Si u est unitaire, alors u est normal, reste à vérifier que ses valeurs propres ont module 1.

g) ($K = \mathbb{R}$) Montrer que si $u \in O(E)$ alors u est diagonalisable en blocs de taille ≤ 2 dans une base orthonormée. L'écrire.

aide: si $u \in O(E)$ alors u est unitaire. D'après la question d) u est diagonalisable en blocs de taille ≤ 2 dans une base orthonormée. et chaque bloc de taille 2 s'écrira

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ et } \lambda = \cos\theta + i\sin\theta \in Spec(\tilde{u})$$

h) ($K = \mathbb{R}$) Montrer que $SO(E)$ est connexe par arcs et $O(E)$ a deux composantes connexes.

aide: Soit

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t\theta & \sin t\theta \\ -\sin t\theta & \cos t\theta \end{pmatrix}$$

alors $M(0) = I$, et $M(1) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Utiliser la décomposition en blocs et la matrice $M(t)$ pour fabriquer un arc dans $SO(E)$ qui passe par u et par I.

Exemple 5 *Soit E l'espace vectoriel des matrices réelles carrées $n \times n$. On se propose de calculer la signature de la forme quadratique q définie sur E par $q(A) = \mathrm{tr}(A^2) - (\mathrm{tr}(A))^2$. Soit φ sa forme polaire.*

- *Montrer que E se décompose $E = D_n \overset{\perp}{\oplus} F \overset{\perp}{\oplus} G$, où D_n est le sev des matrices diagonales, F est le sev des matrices symétriques ayant une diagonale nulle, et G est le sev des matrices antisymétriques et $\perp$ signifie orthogonale pour φ.*

  Nous avons que $\varphi(A, B) = \mathrm{tr}(AB) - (\mathrm{tr}(A))(\mathrm{tr}(B))$. Pour montrer la décomposition précédente, il faut faire le calcul $\varphi(A, B), \varphi(A, C), \varphi(B, C)$ pour $A \in D_n, B \in F, C \in G$.

- *Ecrire la matrice J de q dans la base canonique de D_n.*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & ... & 1 & 1 \\ ... \\ ... \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- *Vérifier que $(I_n + J)^2 = n(I_n + J)$. En déduire le polynôme minimal de J.*
- *Déterminer les espaces propres de J. En déduire la signature de la restriction de q à D_n.*
- *Montrer que la restriction de q à F est définie positive.*

  Une matrice symétrique est diagonalisable dans une BON.

- *Montrer que la restriction de q à G est définie négative. Une matrice antisymétrique M est normale et dans une BON elle aura une écriture en blocs antisymétriques (Voir ci-dessus). Ses valeurs propres sont des imaginaires pures et M^2 est diagonale.*
- *Déterminer la signature de q.*

  $sign\ q|_{D_n} = (1, n-1), sign\ q|_F = (\frac{n(n-1)}{2}, 0), sign\ q|_G = (0, \frac{n(n-1)}{2})$