Préparation à l'agrégation interne de mathématiques
Aide à la résolution pour les exercices du mercredi 5 septembre 2007
Jean-Marie Monier

Exercice 1

a) 1) Existence :

$f : x \longmapsto \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$ et $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

2) Calcul :

Décomposer $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ en éléments simples, intégrer sur $[0\,;X]$, puis faire $X \longrightarrow +\infty$.

Réponse : $I = \ln 2$.

b) 1) Existence :

$f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ est continue sur $[0\,;1[$ et $f(x) \underset{x \longrightarrow 1}{\sim} \dfrac{1}{(1-x)^{1/2}}$.

2) Calcul :

Changement de variable $y = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ puis ipp, avec $u = y$ et $v' = \dfrac{2y}{(1+y^2)^2}$.

Réponse : $I = \dfrac{\pi}{2}$.

c) 1) Existence :

$f : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^2+x+1}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$, $f(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} \ln x$ et $x^{3/2} f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

2) Calcul :

Par le changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$, obtenir $I = -I$.

Réponse : $I = 0$.

d) 1) Existence :

$f : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x(1-x)}}$ est continue sur $]0\,;1[$, $x^{3/4} f(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$ et $f(x) \underset{x \longrightarrow 1}{\longrightarrow} 0$.

2) Calcul :

Par les changements de variable $t = \sqrt{x}$ et $u = \operatorname{Arcsin} t$, se ramener à $I = 4 \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, \mathrm{d}x$.

Cette dernière intégrale est assez classique, cf. Exercices, Analyse MP, ex. 3.6.

Réponse : $I = -2\pi \ln 2$.

Exercice 2

• L'application $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} - \operatorname{Arcsin}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]1\,;+\infty[$.

• En 1 : $f(x) \underset{x \longrightarrow 1}{\sim} \dfrac{1}{(x-1)^{1/2}}$.

• En $+\infty$: passer par un développement limité et obtenir $f(x) = O\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

On conclut que l'intégrale proposée converge.

Exercice 3

a) • Obtenir un équivalent de u_n en passant par des développements limités.

Réponse : diverge.

b) Règle de d'Alembert. On obtient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Réponse : converge.

c) Faire un développement asymptotique.

Réponse : diverge.

d) Appliquer le TSCSA.

Réponse : converge.

Exercice 4

1) Existence :

$u_n = \dfrac{1}{n(n+2)} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

2) Calcul :

Décomposer en éléments simples et télescoper de 1 à N, puis $N \longrightarrow +\infty$.

Réponse : $S = \dfrac{3}{4}$.

****