Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Jean-Marie Monier

pour mercredi 13 juin 2007

Exercices de révision

Thème : Intégration

1 Existence et calcul de : $$I = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^4}\,\mathrm{d}x.$$

2 Montrer : $$\int_0^{+\infty} \frac{1+x^n}{1+x^{n+2}}\,\mathrm{d}x = 2 + \underset{n\infty}{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

3 Déterminer la nature de l'intégrale impropre : $$\int_{\to 0}^{\to +\infty} \Big(\mathrm{e}^{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}} - 1\Big)\,\mathrm{d}x.$$

4 Étude de fonction et tracé de courbe représentative pour : $$f(x) = \int_0^1 \frac{\ln(x+t)}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

5 *a)* Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ existe si et seulement si $x > 0$.

On note :
$$\Gamma :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

b) 1) Établir : $\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$

2) En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \Gamma(n+1) = n!\,.$

c) Démontrer que Γ est de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$ et exprimer, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $\Gamma^{(k)}(x)$ sous forme d'une intégrale.

d) Montrer que Γ est convexe.

e) Établir : $\Gamma(x) \underset{x \,\longrightarrow\, 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et en déduire : $\Gamma(x) \underset{x \,\longrightarrow\, 0}{\longrightarrow} +\infty.$

f) Dresser le tableau de variation de Γ et montrer : $\Gamma(x) \underset{x \,\longrightarrow\, +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

g) Tracer l'allure de la courbe représentative de Γ.

* *