Corrigé de e3a 2006 PC Épreuve A

partie I

1. (a) $T_n : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ est à l'évidence linéaire et vérifie $T_n \circ T_n = T_n$, donc T_n est un projecteur de $\mathbb{R}[X]$.

1. (b) Comme : $\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad T_n(P) \in \mathbb{R}_n(X)$ et que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad T_n(P) = P$, il est clair que : $\mathrm{Im}\,(T_n) = \mathbb{R}_n[X]$.

1. (c) On a, pour tout $P = \sum_{k \geqslant 0} p_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, puisque T_n est un projecteur :

$$P \in \mathrm{Im}\,(T_n) \iff T_n(P) = P \iff \big(\forall\, k \geqslant n+1, \quad p_k = 0\big) \iff X^{n+1} \mid P$$
$$\iff \big(\exists\, Q \in \mathbb{R}[X], \quad P = X^{n+1}Q\big) \iff P(x) \underset{x \longrightarrow 0}{=} o(x^n).$$

2. (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

• Si $P \neq 0$, notons $N = \deg(P) \in \mathbb{N}$, $P = \sum_{k=0}^{N} p_k X^k$, $p_N \neq 0$.

On a : $\varphi(P) = \sum_{k=0}^{N} p_k (X + X^2)^k$. Il est clair alors que $\deg\big(\varphi(P)\big) = 2N = 2\deg(P)$.

• Si $P = 0$, alors $\varphi(P) = 0$, donc $\deg\big(\varphi(P)\big) = -\infty = 2\deg(P)$.

On conclut : $$\boxed{\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \quad \deg\big(\varphi(P)\big) = 2\deg(P)}$$

2. (b) • Il est immédiat que φ est linéaire.
Soit $P \in \mathrm{Ker}\,(\varphi)$. Si $P \neq 0$, alors, d'après (a), $\deg\big(\varphi(P)\big) = 2\deg(P) \in \mathbb{N}$, donc $\varphi(P) \neq 0$.
Ceci montre : $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \{0\}$, et on conclut :

$$\boxed{\varphi \text{ est injective}}$$

• D'après (a), pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, le degré de P est $-\infty$ ou un nombre pair, donc φ n'atteint pas les polynômes de degré impair. Par exemple, X n'a pas d'antécédent par φ. On conclut :

$$\boxed{\varphi \text{ n'est pas surjective}}$$

3. (a) On calcule les $\varphi_4(X^j)$, $0 \leqslant j \leqslant 4$:

$\varphi_4(1) = T_4\big(\varphi(1)\big) = T_4(1) = 1,$
$\varphi_4(X) = T_4\big(\varphi(X)\big) = T_4(X + X^2) = X + X^2$
$\varphi_4(X^2) = T_4\big(\varphi(X^2)\big) = T_4\big((X + X^2)^2\big) = X^2 + 2X^3 + X^4$
$\varphi_4(X^3) = T_4\big(\varphi(X^3)\big) = T_4\big((X + X^2)^3\big) = X^3 + 3X^4$
$\varphi_4(X^4) = T_4\big(\varphi(X^4)\big) = X^4.$

On en déduit, la matrice M_4 de φ_4 dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$:

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

Soit $j \in \{0, ..., n\}$. On a, en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}\varphi_n(\mathrm{X}^j) = T_n\big(\varphi_n(\mathrm{X}^j)\big) = T_n\big((\mathrm{X}+\mathrm{X}^2)^j\big) &= T_n\Big(\sum_{k=0}^{j} \mathrm{C}_j^k \mathrm{X}^{j-k}(\mathrm{X}^2)^k\Big) \\ &= T_n\Big(\sum_{k=0}^{j} \mathrm{C}_j^k \mathrm{X}^{j+k}\Big) \underset{[i=j+k]}{=} T_n\Big(\sum_{i=j}^{2j} \mathrm{C}_j^{j-i}\mathrm{X}^i\Big) = \sum_{i=j}^{\mathrm{Min}\,(2j,n)} \mathrm{C}_j^{i-j}\mathrm{X}^i.\end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{\forall\,(i,j) \in \{0, ..., n\},\quad m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i < j \\ \dbinom{i-j}{j} & \text{si} \quad i \geqslant j \end{cases}}$$

Ceci montre que M_n est triangulaire inférieure.

4. (a) La matrice carrée M_4 est triangulaire inférieure et à termes diagonaux tous non nuls, donc M_4 est inversible.

On a, pour tout $X = {}^{\mathrm{t}}(x_0, ...x_4) \in \mathbb{R}^5$ et tout $Y = {}^{\mathrm{t}}(y_0, ..., y_4) \in \mathbb{R}^5$:

$$MX = Y \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_0 = y_0 \\ x_1 = y_1 \\ x_1 + x_2 = y_2 \\ 2x_2 + x_3 = y_3 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = y_4 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = y_0 \\ x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 - y_1 \\ x_3 = y_3 - 2(y_2 - y_1) = y_3 - 2y_2 + 2y_1 \\ x_4 = y_4 - (y_2 - y_1) - 3(y_3 - 2y_2 + 2y_1) = y_4 - 3y_3 + 5y_2 - 5y_1. \end{cases}$$

On conclut :

$$\boxed{M_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}}$$

On peut contrôler $M_4 M_4^{-1} = \mathrm{I}_5$ en effectuant le produit matriciel.

4. (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Puisque la matrice carrée M_n est triangulaire (inférieure) à termes diagonaux tous non nuls, M_n est inversible.

Il en résulte que φ_n est bijectif.

4. (c) Puisque M_n est triangulaire inférieure à termes diagonaux tous non nuls, d'après le Cours, sa matrice inverse est aussi triangulaire inférieure .

5. (a) • On a : $\qquad \forall\, i \in \{0, ..., n\},\ \ T_n\big((\mathrm{X}+\mathrm{X}^2)^j\big) = T_n\big(\varphi(\mathrm{X}^i)\big) = \varphi_n(\mathrm{X}^i).$

Comme φ_n est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et que $\mathcal{B} = (\mathrm{X}^i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $\mathcal{B}' = \big(\varphi_n(\mathrm{X}^i)\big)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est aussi une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

• Comme $M_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_n)$ et que $\mathcal{B}' = \varphi_n(\mathcal{B})$, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est M_n.

D'après le Cours, la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est donc $Q_n = M_n^{-1}$.

5. (b) D'après la définition de Q_n, on a :

$$\forall j \in \{0, ..., n\}, \quad \mathrm{X}^j = \sum_{i=0}^{n} q_{ij} T_n\big((\mathrm{X}+\mathrm{X}^2)^i\big),$$

d'où, d'après 1. (c) :

$$\forall j \in \{0, ..., n\}, \quad x^j = \sum_{i=0}^{n} q_{ij}\big((x+x^2)^i + o(x^n)\big) = \sum_{i=0}^{n} q_{ij}(x+x^2)^i + o(x^n).$$

5. (c) Soit $j \in \{0, ..., n\}$.

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} q_{i,j}(x+x^2)^i + o(x^n) \;&=\; x^j \;=\; (x+x^2)x^{j-1} - x^{j+1} \\
&= (x+x^2)\Big(\sum_{i=0}^{n} q_{i,j-1}(x+x^2)^i + o(x^n)\Big) - \Big(\sum_{i=0}^{n} q_{i,j+1}(x+x^2)^i + o(x^n)\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{n} q_{i,j-1}(x+x^2)^{i+1} - \sum_{i=0}^{n} q_{i,j+1}(x+x^2)^i + o(x^n) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} q_{i-1,j-1}(x+x^2)^i - \sum_{i=0}^{n} q_{i,j+1}(x+x^2)^i + o(x^n) \\
&= -q_{0,j+1} + \sum_{i=1}^{n}(q_{i-1,j-1} - q_{i,j+1})(x+x^2)^i + o(x^n),
\end{aligned}$$

le terme $q_{n,j-1}(x+x^2)^{n+1}$ rentrant dans le $o(x^n)$.

Ainsi :

$$(q_{0,j} + q_{0,j+1}) + \sum_{i=1}^{n}(q_{i,j} - q_{i-1,j-1} + q_{i,j+1})(x+x^2)^i + o(x^n) = 0.$$

On en déduit $q_{0,j} + q_{0,j+1} = 0$, puis $\forall i \in \{1, ..., n\}, \;\; q_{i,j} - q_{i-1,j-1} + q_{i,j+1} = 0$, car sinon, le premier membre aurait un équivalent en $\lambda x^\alpha, \; \lambda \neq 0$, contradiction avec le second membre.

On conclut :

$$\boxed{\text{Pour tout } (i,j) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant n-1, \text{ on a : } q_{i,j} = q_{i-1,j-1} - q_{i,j+1}}$$

5. (d) La première colonne et la diagonale de Q_5 sont connues :

$$Q_5 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & & 1 & & \\ 0 & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient successivement :

$$q_{2,1} = q_{1,0} - q_{2,2} = 0 - 1 = -1$$

$$\begin{aligned}
q_{3,2} &= q_{2,1} - q_{3,3} = -1 - 1 = -2\\
q_{3,1} &= q_{2,0} - q_{3,2} = 0 - (-2) = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{4,3} &= q_{3,2} - q_{4,4} = -2 - 1 = -3\\
q_{4,2} &= q_{3,1} - q_{4,3} = 2 - (-3) = 5\\
q_{4,1} &= q_{3,0} - q_{4,2} = 0 - 5 = -5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{5,4} &= q_{4,3} - q_{5,5} = -3 - 1 = -4\\
q_{5,3} &= q_{4,2} - q_{5,4} = 5 - (-4) = 9\\
q_{5,2} &= q_{4,1} - q_{5,3} = -5 - 9 = -14\\
q_{5,1} &= q_{4,0} - q_{5,2} = 0 - (-14) = 14.
\end{aligned}$$

On conclut :

$$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 5 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 14 & -14 & 9 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut d'ailleurs contrôler que le produit de M_5 par Q_5 est bien l'identité.

5. (e) La vérification, dans le cas $n = 5$, de la formule proposée est immédiate.

Nous allons prolonger l'énoncé en démontrant cette formule pour tout (i, j).

La formule envisagée s'écrit :

$$q_{i,j} = (-1)^{i+j}\,\frac{j}{i}\binom{2i-j-1}{i-j} = (-1)^{i+j}\,\frac{j}{i}\,\frac{(2i-j-1)!}{(i-j)!(i-1)!} = (-1)^{i+j}\,j\,\frac{(2i-j-1)!}{(i-j)!i!}.$$

La formule est vraie lorsque $j = 0$ et $i \geqslant 1$, puisqu'alors : $q_{i,0} = 0$.

La formule est vraie pour $j = i$, puisqu'alors : $q_{ii} = \mathrm{C}_{i-1}^{0} = 1$.

Supposons la formule vraie pour $(i-1, j-1)$ et pour $(i, j+1)$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
q_{i,j} &= q_{i-1,j-1} - q_{i,j+1}\\
&= (-1)^{i+j-2}(j-1)\frac{\big(2(i-1)-(j-1)-1\big)!}{(i-j)!(i-1)!} - (-1)^{i+j+1}(j+1)\frac{\big(2i-(j+1)-1\big)!}{(i-j-1)!i!}\\
&= (-1)^{i+j}(j-1)\frac{(2i-j-2)!}{(i-j)!(i-1)!} + (-1)^{i+j}(j+1)\frac{(2i-j-2)!}{(i-j-1)!i!}\\
&= (-1)^{i+j}\frac{(2ij-2)!}{(i-j)!i!}\big((j-1)i + (j+1)(i-j)\big)\\
&= (-1)^{i+j}\frac{(2i-j-2)!}{(i-j)!i!}j(2i-j-1) \;=_{(} -1)^{i+j}j\frac{(2i-j-1)!}{(i-j)!i!},
\end{aligned}$$

ce qui montre la formule pour (i, j).

partie II

1. (a) Puisque $x+x^2 \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$, on peut composer les développements limités en 0, donc :

$$f(x+x^2) = P(x+x^2) + o(x^n) = \Big(T_n\big(P(x+x^2)\big) + o(x^n)\Big) + o(x^n) = T_n\big(P(x+x^2)\big) + o(x^n).$$

1. (b) Notons $P = \sum_{k=0}^{n} p_k \mathrm{X}^k$. On a alors, par produit de matrices :

$$f(x+x^2) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} m_{ij} p_j x^i + o(x^n) = \sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i-j} p_j\Big) x^i + o(x^n).$$

2. (a) Ici, $g(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$.

On effectue : $M_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc : $g(x) = 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4)$.

2. (b) Directement :

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{1}{1+(x+x^2)} &= 1 - (x+x^2) + (x+x^2)^2 - (x+x^2)^3 + (x+x^2)^4 + o(x^4) \\ &= 1 - (x+x^2) + (x^2+2x^3+x^4) - (x^3+3x^4) + x^4 + o(x^4) = 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Ou bien, encore plus simplement :

$$g(x) = \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{1-x^3} = (1-x)\big(1+x^3+o(x^3)\big) = 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4).$$

3. (a) Soit f développable en série entière en 0, somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$:

$$\forall\, x \in\,]-R\,;R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n x^n.$$

- Si $R = +\infty$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} \lambda_n (x+x^2)^n$ converge, donc $\Omega = \mathbb{R}$.

- Supposons $R \in\,]0\,;+\infty[$.

L'étude des variations de la fonction $\tau : x \in \mathbb{R} \longmapsto \tau(x) = x + x^2$ est immédiate.

On en déduit les variations de la fonction $|\tau|$:

L'ouvert Ω est l'ensemble $\{x \in \mathbb{R};\ |\tau(x)| < R\}$.

$*$ Si $0 < R < 1/4$, alors l'équation $|\tau(x)| = R$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet quatre solutions a, b, c, d telles que $a < b < c < d$, et on a : $\Omega =]a\,;b[\cup]c\,;d[$.

Le calcul de a, b, c, d est immédiat :

$$a = \frac{-1-\sqrt{1+4R}}{2}, \qquad b = \frac{-1-\sqrt{1-4R}}{2}, \qquad c = \frac{-1+\sqrt{1-4R}}{2}, \qquad d = \frac{-1+\sqrt{1+4R}}{2}.$$

$*$ Si $R = 1/4$, alors l'équation $|\tau(x)| = R$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet trois solutions $a, b = c, d$ telles que $a < b < d$ et on a : $\Omega =]a\,;b[\cup]b\,;d[$.

Le calcul de a, b, d est immédiat :

$$a = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \qquad b = c = -\frac{1}{2}, \qquad d = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}.$$

$*$ Si $R > 1/4$, alors l'équation $|\tau(x)| = R$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet deux solutions a, d telles que $a < d$, et on a : $\Omega =]a[$.

Le calcul de a, d est immédiat :

$$a = \frac{-1-\sqrt{1+4R}}{2}, \qquad d = \frac{-1+\sqrt{1+4R}}{2}.$$

3. (b) D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned} g_N(x) &= \sum_{n=0}^{N} \lambda_n (x+x^2)^n = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n x^n (1+x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} \lambda_n x^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n+j} \underset{[k=n+j]}{=} \sum_{n=0}^{N} \lambda_n \Big(\sum_{k=n}^{2n} \binom{n}{k-n} x^k \Big). \end{aligned}$$

En échangeant l'ordre des deux sommations par le théorème de Fubini, on obtient :

$$g_N(x) = \sum_{k=0}^{2N} \Big(\sum_{n=k/2}^{\mathrm{Min}\,(k,N)} \lambda_n \binom{n}{k-n} \Big) x^k.$$

3. (c) On note $\mu_k = \sum_{n=k/2}^{k} \lambda_n \binom{n}{n-k}$ et $h_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \mu_k x^k$.

On a alors :

$$
\begin{aligned}
\left|h_N(x) - g_N(x)\right| &= \Big|\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k/2}^{k} \mu_k x^k - \sum_{k=0}^{2N}\sum_{n=k/2}^{\mathrm{Min}\,(k,N)} \lambda_n \binom{n}{k-n} x^k\Big| \\
&= \Big|\sum_{k=N+1}^{2N}\sum_{n=k/2}^{N} \lambda_n \binom{n}{k-n} x^k\Big| \\
&\leqslant \sum_{k=N+1}^{2N}\sum_{n=k/2}^{N} |\lambda_n| \binom{n}{n-k} |x|^k \underset{j=k-n}{=} \sum_{n=\frac{N+1}{2}}^{N} |\lambda_n| \Big(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} |x|^j\Big) |x|^n \\
&= \sum_{n=\frac{N+1}{2}}^{N} |\lambda_n| \big(1+|x|\big)^n |x|^n r = \sum_{n=\frac{N+1}{2}}^{N} |\lambda_n| \big(|x|+x^2\big)^n \leqslant \sum_{n=N/2}^{N} |\lambda_n| \big(|x|+x^2\big)^n.
\end{aligned}
$$

3. (d) • Si $|x| + x^2 < R$, alors la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} |\lambda_n|(|x|+x^2)^n$ converge, donc $h_N(x) - g_N(x) \underset{N\infty}{\longrightarrow} 0$.

Mais $g_N(x) \underset{N\infty}{\longrightarrow} f(x+x^2)$. Donc : $h_N(x) \underset{N\infty}{\longrightarrow} f(x+x^2)$.

Ceci montre que $x \longmapsto f(x+x^2)$ est développable en série entière en 0, de rayon $\geqslant \dfrac{-1+\sqrt{1+4R}}{2}$.

• On retrouve ainsi le développement limité de $x \longmapsto f(x+x^2)$ déjà obtenu en II 1. (b), par troncature du polynôme composé $P(x+x^2)$.

4. (a) On a, pour tout $x \in]-1\,;1[$:

$$
g(x) = \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{1-x^3} = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(x^3)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k,
$$

en notant :

$$
a_k = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = 3n,\ n \in \mathbb{N} \\ -1 & \text{si} \quad k = 3n+1,\ n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si} \quad k = 3n+2,\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}
$$

4. (b) D'après 3. (d) : $\quad f(x) = \dfrac{1}{1+x}, \qquad \lambda_n = (-1)^n, \qquad \mu_k = \displaystyle\sum_{n=k/2}^{k} \lambda_n \binom{n}{k-n} = S_k.$

On a donc :

$$
S_k = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = 3n,\ n \in \mathbb{N} \\ -1 & \text{si} \quad k = 3n+1,\ n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si} \quad k = 3n+2,\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}
$$

partie III

1. (a) • L'étude des variations de $a : x \in \mathbb{R} \longmapsto u = a(x) = x + x^2$ est immédiate :

Il est clair que les intervalles ouverts I et J, contenant 0 et aussi grands que possible, tels que a définisse une bijection de I sur J sont : $I =]-1/2\,;+\infty[$, $J =]-1/4\,;+\infty[$.

• On a, pour tout $(x, u) \in]-1/2\,;+\infty[\times]-1/4\,;+\infty[$:

$$u = a(x) \iff x^2 + x - u = 0 \iff x = \frac{-1+\sqrt{1+4u}}{2},$$

car l'autre solution, $\dfrac{-1-\sqrt{1+4u}}{2}$ n'est pas dans $]-1/2\,;+\infty[$.

Il en résulte :

$$\boxed{\forall\, u \in \left]-\frac{1}{4}\,;+\infty\right[,\quad a^{-1}(u) = \frac{-1+\sqrt{1+4u}}{2}}$$

1. (b) D'après le Cours, la fonction $v \longmapsto (1+v)^{1/2}$ est développable en série entière en 0, de rayon 1 et, pour tout $v \in]-1\,;1[$:

$$(1+v)^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} v^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1(-1)(-3)\cdots(-2n+3)}{2^n n!} v^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!} v^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{2^n 2^{n-1}(n-1)!n!} v^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2} v^n.$$

D'où, pour tout $u \in]-1/2\,;+\infty[$, en remplaçant v par $4u$: $a^{-1}(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{(2n-1)(n!)^2} u^n.$

Ceci montre que a^{-1} est développable en série entière en 0 et que le rayon de convergence est $1/4$.

$$\boxed{\forall\, u \in \left]-\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\right[,\quad a^{-1}(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{(2k-1)(k!)^2} u^k,\quad R = \frac{1}{4}}$$

1. (c) On a : $\displaystyle x = a^{-1}(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k u^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k (x+x^2)^k = \sum_{k=0}^{n} b_k (x+x^2)^k + \underset{x \longrightarrow 0}{o}(x^n),$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après I 1. (c) :

$$\mathrm{X} = T_n\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k (\mathrm{X}+\mathrm{X}^2)^k\Big) = \sum_{k=0}^{n} b_k T_n(\mathrm{X}+\mathrm{X}^2)^k = \sum_{k=0}^{n} b_k T_n\big(\varphi(\mathrm{X}^k)\big) = \sum_{k=0}^{n} b_k \varphi_n(\mathrm{X}^k),$$

donc les b_k sont les coefficients de la 2ème colonne de $Q_n = M_n^{-1}$.

1. (d) On a obtenu en 1. : $\quad b_k = \dfrac{(-1)^{k-1}(2k)!}{(2k-1)(k!)^2} = (-1)^{k+1}\dfrac{1}{k}\dbinom{2k-2}{k-1} = q_{k,1}\,,$

et on retrouve ainsi un résultat de I 5. (e).

2. (a) • Pour tout $w \in \mathbb{C}$ fixé, l'équation $z + z^2 = w$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, admet deux solutions z_1, z_2 et on a : $z_1 + z_2 = -1$ donc ces deux solutions restent symétriques par rapport au point d'affixe $-1/2$.

• Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ z = x + \mathrm{i}\,y$. On a :

$$\alpha(z) = z + z^2 = (x + \mathrm{i}\,y) + (x + \mathrm{i}\,y)^2 = x + \mathrm{i}\,y + x^2 + 2\,\mathrm{i}\,xy - y^2,$$

d'où, en séparant partie réelle et partie imaginaire, et en notant $w = \alpha(z) = u + \mathrm{i}\,v,\ (u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$u = x + x^2 - y^2 \qquad \text{et} \qquad v = y + 2xy.$$

Si $y = 0$, alors $u = x + x^2 \in \mathbb{R}$ et $x + x^2 \in]-1/4\,;+\infty[$.
Il en résulte que $\alpha(\Pi) \subset U$, où U est le plan privé de la demi-droite fermée réelle $]-\infty\,;-1/4[$.

Réciproquement, soit $w = u + \mathrm{i}\,v \in U$.
L'équation $z + z^2 = w$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, admet deux solutions z_1, z_2. En notant $z_1 = x_1 + \mathrm{i}\,y_1,\ z_2 = x_2 + \mathrm{i}\,y_2,\ x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, on a $v = (2x_1 + 1)y_1 = (2x_2 + 1)y_2$. Si $v \neq 0$, alors $x_1 \neq -1/2$, et, comme $x_1 + x_2 = \mathrm{Re}\,(z_1 + z_2) = -1/2$, l'un des deux points z_1 ou z_2 est dans Π et l'autre n'y est pas.
On conclut : $\alpha : \Pi \longrightarrow U$ est bijective.

• L'application $\alpha : (x,y) \longmapsto (x + x^2 - y^2,\ y + 2xy)$ est de classe C^1 par les théorèmes généraux.
On calcule, pour tout $(x,y) \in \Pi$, le déterminant jacobien de α en (x,y) :

$$\det\big(J_\alpha(x,y)\big) = \begin{vmatrix} 1+2x & 2y \\ -2y & 1+2x \end{vmatrix} = (1+2x)^2 + (2y)^2 > 0.$$

Ainsi, le jacobien de α en tout point de Π est non nul.
D'après un théorème du Cours, on conclut :

$$\boxed{\alpha \text{ est un } C^1\text{-difféomorphisme de } \Pi \text{ sur } U}$$

2. **(b)** Soient $k \in]-1/2\,;+\infty[$, D_k la droite d'équation $x = k$.
Une représentation paramétrique de $\alpha(\Pi)$ est donc, avec les notations précédentes :

$$u = k + k^2 - y^2 \quad \text{et} \quad v = y + 2ky = (1+2k)y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

En éliminant y, on obtient une équation cartésienne de $\alpha(\Pi)$:

$$u = k + k^2 - \left(\frac{v}{1+2k}\right)^2 \iff (1+2k)^2 u = (k+k^2)(1+2k)^2 - v^2 \iff v^2 = (1+2k)^2\big(-u + (k+k^2)\big).$$

On conclut que l'image de D_k par α est la parabole d'axe Ou, de sommet O, de foyer $F\big(-p/2, 0\big)$, où :
$\dfrac{p}{2} = k + k^2 - \dfrac{(1+2k)^2}{4} = -\dfrac{1}{4}$.

3. D'après III 1. (b), le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_k b_k w^k$ est $1/4$.

L'application $\beta : w \longmapsto \beta(w) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} b_k w^k$ est donc définie sur le disque ouvert $|z| < 1/4$. Sur ce disque, par opérations sur les séries entières, l'application $\gamma : w \longmapsto \gamma(w) = \big(\beta(w)\big)^2 + \beta(w) - w$ est développable en série entière, notée $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k w^k$.
Dans le cas particulier où w est réel, en notant $w = u \in]-1/4\,;1/4[$, on a : $\gamma(u) = 0$, car $\beta(u) = a^{-1}(u)$.
Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, on a donc : $\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad c_k = 0$.
Il en résulte alors que γ est la fonction nulle sur le disque $|z| < 1/4$. On obtient ainsi $\alpha\big(\beta(w)\big) = w$.

Montrons enfin que, pour tout w dans le disque $|w| < 1/4$, on a $\beta(w) \in \Pi$.
Soit $w \in \mathbb{C}$ tel que $|w| < 1/4$. Mettons w sous forme trigonométrique : $w = \rho\, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}$, $\rho \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \mathbb{R}$.
On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\big(\beta(w)\big) &= \mathrm{Re}\,\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k w^k\Big) = \mathrm{Re}\,\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \rho^k\, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,k\theta}\Big)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \rho^k \cos(k\theta) \geqslant -\sum_{k=0}^{+\infty} |b_k|\rho^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(-\rho)^k = a^{-1}(-\rho) > -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ceci montre que $\beta(w) \in \Pi$, et donc $\beta(w) = \alpha^{-1}(w)$.
Finalement :

$$\boxed{\forall\, w \in \mathbb{C}, \quad |w| < 1/4 \implies \beta(w) = \alpha^{-1}(w)}$$

****