**Préparation à l'agrégation interne de mathématiques**
**Aide à la résolution pour les exercices du mercredi 14 janvier 2006**
**Jean-Marie Monier**

## Exercice 1

*a)* $a_n \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}}$ et d'Alembert. Réponse : 1.

*b)* $a_n \underset{n\infty}{\sim} \mathrm{e}^{(-1)^n n}\mathrm{e}^{-1/2}$, séparer indices pairs, impairs. Réponse : $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

*c)* Règle de d'Alembert. Réponse : $\dfrac{5^5}{2^2 \cdot 3^3}$.

*d)* Par comparaison série-intégrale, $\ln(n!) \underset{n\infty}{\sim} n\ln n$. Réponse : 1.

## Exercice 2

*a)* Décomposer le polynôme $\mathrm{X}^4 + \mathrm{X}^2 + 1$ sur les polynômes $1,\ \mathrm{X},\ \mathrm{X}(\mathrm{X}-1),\ \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2), \ldots$
Réponse : $R = \infty,\ S(x) = (x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 2x + 1)\mathrm{e}^x$.

*b)* Obtenir $a_n = \dfrac{1}{n!(n+2)}$. Réponse : $R = \infty,\ S(x) = \frac{(x-1)\mathrm{e}^x + 1}{x^2}$ si $x \neq 0$, et $S(x) = \frac{1}{2}$ si $x = 0$.

*c)* Dériver la série entière, puis calculer une primitive.
Réponse : $R = 1$, $S(x) = \frac{1}{3x}\Big( -\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\frac{\pi}{2}\Big)$ si $x \neq 0$, et $S(0) = 1$.

*d)* Décomposer en éléments simples. Changements de variable $t = \sqrt{x},\ t = \sqrt{-x}$. Réponse : $R = 1$,
$S(x) = \ln(1-x) + \sqrt{x}\ln\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ si $0 < x < 1$, $S(x) = 0$ si $x = 0$,
$S(x) = \ln(1-x) - 2\sqrt{-x}\,\mathrm{Arctan}\,(\sqrt{-x})$ si $-1 < x < 0$.

*e)* Montrer $R \geqslant 1$. calculer, pour $N \in \mathbb{N}$ : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ en faisant intervenir une sommation géométrique, puis faire tendre $N$ vers l'infini. Réponse : $R = 1$ et $S(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\Big( -x\ln(1-x) + \dfrac{1}{2}x\ln 2 + \dfrac{\pi}{4}$

## Exercice 3

*a)* Réponse : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+2}{2n+4)!} x^{2n+1}, \quad R = \infty.$

*b)* Réponse : $f(x) = \ln 15 - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n}\Big)x^n,\ R = 3.$

*c)* Simplifier. Réponse : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^n \frac{3^{2n}+1}{(2n)!}x^{2n},\ R = \infty.$

*d)* Montrer que $f$ satrisfait l'équation diférentielle $(1+x^2)y' + xy = 1$ et procéder par coefficients indéterminés. Réponse : $f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p(2^p p!)^2}{(1p+1)!}x^{2p+1},\ R = 1.$

## Exercice 4

L'énoncé très détaillé fait office d'aide à la résolution.

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *