e3a

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PC

durée 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

partie I

Un entier naturel $n \geqslant 2$ étant fixé, on note $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré au plus n.

On définit alors pour tout polynôme $P = \sum\limits_{k\geqslant 0} p_k X^k$ de $\mathbb{R}[X]$:

– le polynôme *tronqué* de P au degré n : $T_n(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k X^k$;

– le polynôme *composé* de P et $X + X^2$: $\varphi(P) = \sum\limits_{k\geqslant 0} p_k (X + X^2)^k$.

On confondra tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ avec sa fonction polynomiale réelle associée : $x \mapsto P(x)$.

1. (a) Établir que $T_n : P \mapsto T_n(P)$ définit un projecteur de $\mathbb{R}[X]$.

   (b) Déterminer l'image de T_n.

   (c) Montrer qu'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ appartient au noyau de T_n si et seulement si :
   $$P(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n).$$

2. (a) Déterminer, pour tout P de $\mathbb{R}[X]$ une relation entre le degré de P et celui de $\varphi(P)$.

   (b) Prouver que φ définit un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}[X]$; φ est-il surjectif ?

3. On définit maintenant un endomorphisme φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$ en posant, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:
   $$\varphi_n(P) = T_n(\varphi(P))$$
   et on note $M_n = [m_{i,j}]_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de φ_n dans la base canonique $\mathscr{B} = (X^j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

   On remarquera que l'indice i de ligne et l'indice j de colonne varient de 0 à n.

   (a) Calculer les $\varphi_4(X^j)$ pour $0 \leqslant j \leqslant 4$ et en déduire M_4 (il s'agit d'une matrice 5×5).

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, la matrice M_n est triangulaire inférieure, et expliciter son terme général $m_{i,j}$ lorsque $0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$.

4. (a) Inverser la matrice M_4.

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, la matrice M_n est inversible. Que peut-on en conclure pour l'endomorphisme φ_n ?

   (c) Montrer que la matrice inverse de M_n, notée $Q_n = [q_{i,j}]_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$, est triangulaire inférieure.

5. (a) Montrer que les $T_n((X+X^2)^i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$ forment une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $Q_n = (M_n)^{-1}$ est la matrice de $\mathscr{B} = (X^j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ dans cette nouvelle base $\mathscr{B}'$.

   (b) Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $j \leqslant n$, lorsque x tend vers 0 : $x^j = \sum\limits_{i=0}^{n} q_{i,j}(x+x^2)^i + o(x^n)$.

   (c) Pour tous les entiers naturels i, j tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n-1$, en remarquant que $X^j = (X+X^2)\,X^{j-1} - X^{j+1}$, établir la relation de récurrence :
$$q_{i,j} = q_{i-1,j-1} - q_{i,j+1}.$$

   (d) Construire alors la matrice $Q_5 = (M_5)^{-1}$ à partir de sa première colonne et de sa diagonale, en indiquant l'enchaînement des calculs.

   (e) Vérifier que lorsque $n = 5$, on a pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $0 \leqslant j \leqslant i$:
$$q_{i,j} = (-1)^{i+j}\,\frac{j}{i}\binom{2i-j-1}{i-j}$$
   où pour $(m,p) \in \mathbb{N}^2$, $0 \leqslant p \leqslant m$, $\binom{m}{p}$ désigne le coefficient binomial noté parfois C_m^p.

   Dans le reste du problème, ce résultat sera admis pour tout entier naturel $n \geqslant 2$.

partie II

1. Soit I un intervalle ouvert contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une application admettant un développement limité d'ordre $n \geqslant 2$ en 0, de partie régulière $P \in \mathbb{R}_n[X]$; c'est-à-dire que :
$$f(x) \underset{x \to 0}{=} P(x) + o(x^n).$$

   (a) En utilisant éventuellement le I 1°c, montrer que l'application $x \mapsto f(x+x^2)$ admet en 0 un développement limité d'ordre n de partie régulière $\varphi_n(P)$, c'est-à-dire que :
$$f(x+x^2) \underset{x \to 0}{=} T_n(P(x+x^2)) + o(x^n).$$

   (b) Si $P = p_0 + p_1 X + \cdots + p_n X^n$, déterminer à l'aide des notations de la partie I, un calcul matriciel fournissant directement le développement limité d'ordre n de $x \mapsto f(x+x^2)$ en 0 à partir du vecteur colonne formé de $p_0, \ldots, p_n$; expliciter alors ce développement limité.

2. (a) Appliquer le II 1°b pour obtenir le développement limité d'ordre 4 en 0 de l'application :
$$g : x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}.$$

   (b) Vérifier ce résultat par un calcul direct de développement limité que l'on détaillera.

3. Soit une application f, somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$, fini ou non :
$$\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n\, x^n.$$

   (a) Déterminer le plus grand ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \Omega$, la série numérique $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda_n\,(x+x^2)^n$ converge (il faudra distinguer différents cas selon les valeurs de R).

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose : $g_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} \lambda_n (x+x^2)^n$. Montrer que :

$$g_N(x) = \sum_{k=0}^{2N} \left(\sum_{n=k/2}^{\min(k,N)} \lambda_n \binom{n}{k-n} \right) x^k.$$

(Dans une telle somme, n ne prend que les valeurs entières entre les bornes indiquées.)

(c) Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mu_k = \sum\limits_{n=k/2}^{k} \lambda_n \binom{n}{k-n}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose $h_N(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} \mu_k x^k$. Montrer que :

$$|h_N(x) - g_N(x)| \leqslant \sum_{n=N/2}^{N} |\lambda_n|(x^2+|x|)^n.$$

(d) Déduire de ce qui précède que, sur un intervalle à préciser, on a : $f(x+x^2) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mu_k x^k$.

Retrouver alors le développement limité d'ordre n en 0 de $x \mapsto f(x+x^2)$ obtenu en II 1°b.

4. (a) En remarquant que $1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$, développer en série entière au voisinage de 0 l'application $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$ et préciser le rayon de convergence de cette série entière.

(b) Utiliser ce résultat et celui de la question II 3°d pour évaluer, selon $k \in \mathbb{N}$, les sommes :

$$S_k = \sum_{n=k/2}^{k} (-1)^n \binom{n}{k-n}.$$

partie III

1. (a) Déterminer des intervalles ouverts I et J, contenant 0 et aussi grands que possible, tels que $a : x \mapsto u = x + x^2$ définisse une bijection de I vers J. Exprimer alors $a^{-1}(u)$ pour $u \in J$.

(b) Montrer que cette fonction $a^{-1} : J \to I$ est développable en série entière au voisinage de 0, et préciser le rayon de convergence de la série entière associée que l'on notera $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k u^k$.

(c) Montrer, à l'aide du I 5°a, que les coefficients $b_0, b_1, \ldots, b_n$ sont les termes de la deuxième colonne de $Q_n = (M_n)^{-1}$ (colonne d'indice 1).

(d) Calculer directement le développement en série entière de $a^{-1}(u)$ au voisinage de 0 et comparer les résultats obtenus à ceux résultant du I 5°e.

2. On considère maintenant l'application $\alpha : z \mapsto w = z + z^2$, définie sur le demi-plan ouvert Π formé des $z = x + i\,y$ tels que $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $x > -1/2$.

On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, si bien que en posant $w = u + i\,v$ avec $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, α est aussi l'application $(x,y) \mapsto (u,v)$ définie sur l'ensemble Π des (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x > -1/2$.

(a) Établir que lorsque w décrit $\mathbb{C}$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z + z^2 = w$ restent symétriques par rapport à un point fixe, puis montrer ensuite que l'application α définit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme entre Π et le plan $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ privé d'une demi-droite à préciser.

(b) Soient dans Π les droites D_k, d'équations $x = k$ ($k \in \mathbb{R}$, $k > -1/2$). Montrer que ces droites ont pour images par α des paraboles d'axe Ou et toutes de même foyer F, à préciser.

3. On pose maintenant $\beta(w) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k w^k$ lorsque cette série converge, les b_k étant définis au III 1°b.

Montrer que, sur son disque de convergence, cette série a pour somme $\alpha^{-1}(w)$.

(On pourra considérer, sans le calculer, le développement en série entière au voisinage de 0 de l'application $w \mapsto (\beta(w))^2 + \beta(w) - w$.)