Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Jean-Marie Monier

pour mercredi 20 septembre 2006

Problème

Thème : Suites, intégrales, séries

On note, sous réserve d'existence, pour $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$: $\qquad I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$

Le but du problème est d'obtenir un développement asymptotique de I_n à la précision $o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

1 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, I_n existe.

2 Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $I_n = 1 - A_n + B_n$, où :

$$A_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x, \qquad B_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

3 Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$: $\qquad B_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n-2}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$

4 Établir, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$: $\qquad 0 \leqslant B_n - A_n \leqslant \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1},$

et en déduire : $\qquad I_n = 1 + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big).$

5 a Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$: $\qquad n(B_n - A_n) = \displaystyle\int_0^1 \Big(\frac{1}{x^2} + 1\Big)\ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x,$

puis : $\qquad n^2(B_n - A_n) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}(t^{1/n} + t^{-1/n})\,\mathrm{d}t.$

5 b En déduire, en notant $C = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$: $\qquad B_n - A_n \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{C}{n^2}.$

5 c Conclure : $\qquad I_n = 1 + \dfrac{C}{n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big).$

6 a Montrer : $\qquad \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$

6 b On admet $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Déterminer la valeur de C.

* *