Préparation à l'agrégation interne de mathématiques
Aide à la résolution pour les exercices du mercredi 17 juin 2009
Jean-Marie Monier

Niveau I

1 Réponse : $I = 4$.

2 Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale envisagée, puis chercher la borne inférieure lorsque a décrit $\mathbb{R}$.

Réponse : $\dfrac{1}{80}$, obtenu pour $a = \dfrac{3}{4}$.

3 Reconnaître une somme de Riemann.

Réponse : $\sqrt{3} - 1$.

4 Conjecturer la limite et montrer que la différence entre l'intégrale proposée et la limite conjecturée tend vers 0.

Réponse : 0.

5 On peut conjecturer que la limite de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + x^n}\, \mathrm{d}x$ est l'intégrale de la limite, c'est-à-dire $I = \displaystyle\int_0^1 1\, \mathrm{d}x$. Pour montrer $I_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} I$, majorer convenablement $|I_n - I|$ en utilisant une expression conjuguée.

6 Utiliser l'inégalité de Cauchy et Schwarz, appliquée à $\sqrt{f}$, $\sqrt{g}$.

7 Conjecturer la limite et montrer que la différence entre l'intégrale proposée et la limite conjecturée tend vers 0, en transformant l'écriture de cette différence, puis en majorant convenablement sa valeur absolue.

Réponse : $\ln 3$.

8 Étudier successivement : ensemble de définition, dérivée, limites aux bornes. L'outil essentiel est le théorème du cours sur l'étude d'une intégrale dépendant d'un paramètre aux bornes, $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} g(t)\, \mathrm{d}t$.

9 Préciser d'abord l'ensemble de définition et l'ensemble de continuité de la fonction sous l'intégrale, puis l'ensemble de définition des primitives. Primitiver par parties pour faire disparaître $\mathrm{Arcsin}\,\sqrt{x}$, puis utiliser le changement de variable $t = \sqrt{x}$.

Réponse : $\dfrac{2\,\mathrm{Arcsin}\,\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} - \ln \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + C$, où C est une constante sur $[0\,;1[$.

10 Effectuer un changement de variable qui échange les bornes : $t = \dfrac{\pi}{4} - x$.

Réponse : $I = \dfrac{\pi}{8} \ln 2$.

Niveau II

1 *1) Existence :* $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$ et $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

2) Calcul : Décomposer $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ en éléments simples, intégrer sur $[0\,;X]$, puis faire $X \longrightarrow +\infty$.

Réponse : $I = \ln 2$.

2 *1) Existence :* $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ est continue sur $[0\,;1[$ et $f(x) \underset{x \longrightarrow 1}{\sim} \dfrac{1}{(1-x)^{1/2}}$.

2) Calcul : Changement de variable $y = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ puis ipp, avec $u = y$ et $v' = \dfrac{2y}{(1+y^2)^2}$.

Réponse : $I = \dfrac{\pi}{2}$.

3 *1) Existence :* $f : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^2+x+1}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$, $f(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} \ln x$ et $x^{3/2} f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

2) Calcul : Par le changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$, obtenir $I = -I$.

Réponse : $I = 0$.

4 *1) Existence :* $f : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x(1-x)}}$ est continue sur $]0\,;1[$, $x^{3/4} f(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$ et $f(x) \underset{x \longrightarrow 1}{\longrightarrow} 0$.

2) Calcul : Par les changements de variable $t = \sqrt{x}$ et $u = \operatorname{Arcsin} t$, se ramener à $I = 4 \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \,\mathrm{d}x$.

Cette dernière intégrale est assez classique, cf. Exercices, Analyse MP, ex. 3.6.

Réponse : $I = -2\pi \ln 2$.

5 • L'application $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} - \operatorname{Arcsin} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]1\,;+\infty[$.

• En 1 : $f(x) \underset{x \longrightarrow 1}{\sim} \dfrac{1}{(x-1)^{1/2}}$.

• En $+\infty$: passer par un développement limité et obtenir $f(x) = O\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

On conclut que l'intégrale proposée converge.

6 Pour x, X fixés tels que $x \leqslant X$, intégrer deux fois par parties sur $[x\,;X]$, puis faire tendre X vers $+\infty$, pour obtenir : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} - 2\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3}\,\mathrm{d}t$.

Niveau III

1 Cours Analyse MP Exercice 3.3.1.

2 Cours Analyse MP Exercice-type résolu page 197.

3 Cours, Analyse MP Exercice 3.5.16 page 204.

* *