
Exercice 1

Déterminer un nombre xyz de trois chifres (en base 10) tel que :

$$xyz + zyx = 585.$$

Donner toutes les solutions.

Exercice 2

On désigne par m et n deux entiers naturels qui satisfont aux conditions :

$$\begin{cases} m < n \\ m^2 \text{ est divisible par } n. \end{cases} \tag{1}$$

Soit d le plus grand diviseur commun à m et n. On pose

$$m = dm_1 \text{ et } n = dn_1. \tag{2}$$

1. - i - Montrer que n_1 divise d :

   $$d = \delta n_1, \tag{3}$$

   et que n est divisible par un carré parfait.

   - ii - On donne un nombre n divisible par un carré parfait. Indiquer comment la décomposition de n en facteurs premiers permet de former μ, le plus petit des nombres m qui vérifie les conditions de 2. Montrer que toutes les autres valeurs de m sont des multiples de μ.
   On suppose $n = 108$. Trouver toutes les valeurs de m. Montrer comment, de la décomposition de 108 en facteurs premiers, on peut déduire le nombre de solutions.

2. On pose :

   $$p = n - \frac{m^2}{n}. \tag{4}$$

   - i - Montrer que :

   $$p = k(n_1 + m_1)(n_1 - m_1). \tag{5}$$

   - ii - Monter que p n'est jamais égal à 1 ou 2.
   - iii - On suppose que p est un nombre premier supérieur à 2. Montrer que l'équation 4 où m et n sont des inconnues, a une solution unique ; quelle est cette solution ?
   - iv - Soient q et r deux nombres premiers tels que : $q > r > 2$. On suppose qu'on a : $p = qr$. Montrer que l'équation 4 admet quatre solutions distinctes ; quelles sont ces solutions ?
   Etudier les trois cas suivants :

   $$\text{a) } r = 2, q > 2; \text{ b) } r > 2, q = r; \text{ c) } q = r = 2.$$

Exercice 3

On considère l'équation diophantienne où x, y et z sont des entiers :

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{6}$$

On dit qu'une solution est *primitive* si le pgcd de x, y et z est 1.

1. Montrer qu'on peut supposer qu'une solution primitive est telle que x est pair alors que y est impair.
2. Montrer que toute solution primitive s'écrit

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$$

   où u et v sont des entiers avec $u \not\equiv v \mod 2$ et $u > v$.
3. Résoudre l'équation 6 dans le cas général.