Exercice 1

On développe $(x+r)^{m+1}$ par la formule du binôme. Il vient :

$$(x+r)^{m+1} = x^{m+1} + \binom{1}{m+1} r x^m + \ldots + \binom{p}{m+1} r^p x^{m+1-p} + \ldots + r^{m+1}$$

On remplace alors la variable x par les n premiers termes de la suite arithmétique $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$, obtenant ainsi les n égalités

$$\begin{aligned}
(u_0+r)^{m+1} &= u_0^{m+1} + \binom{1}{m+1} r u_0^m + \ldots + \binom{p}{m+1} r^p u_0^{m+1-p} + \ldots + r^{m+1}\\
(u_1+r)^{m+1} &= u_1^{m+1} + \binom{1}{m+1} r u_1^m + \ldots + \binom{p}{m+1} r^p u_1^{m+1-p} + \ldots + r^{m+1}\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
(u_{n-1}+r)^{m+1} &= u_{n-1}^{m+1} + \binom{1}{m+1} r u_{n-1}^m + \ldots + \binom{p}{m+1} r^p u_{n-1}^{m+1-p} + \ldots + r^{m+1}.
\end{aligned}$$

Puis, on ajoute membre à membre ces n égalités en observant que $(u_{i-1}+r)^{m+1} = u_i^{m+1}$ et que le coefficient de $\binom{p}{m+1} r^p$ sera S_n^{m-p+1} et on obtient la formule cherchée

$$\begin{aligned}
(u_{n-1}+r)^{m+1} = a^{m+1} &+ \binom{1}{m+1} r S_n^m + \binom{2}{m+1} r^2 S_n^{m-1} + \ldots\\
&+ \binom{p}{m+1} r^p S_n^{m-p+1} + \ldots + n r^{m+1}
\end{aligned}$$

Cette formule permet de calculer S_n^1, puis S_n^2, puis S_n^3 et ainsi de suite. On obtient comme premières valeurs en prenant $a=1$ et $r=1$
$(n+1)^2 = 1 + 2S_n^1 + n$, soit $1+2+\ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$,
$(n+1)^3 = 1 + 3S_n^2 + 3S_n^1 + n$ et, en remplaçant S_n^1 par $\frac{n(n+1)}{2}$, on obtient

$$3S_n^2 = (n+1)\left[(n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1\right]$$

soit $1^2+2^2+\ldots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
$(n+1)^4 = 1 + 4S_n^3 + 6S_n^2 + 4S_n^1 + n$ et, en remplaçant S_n^1 par $\frac{n(n+1)}{2}$ et S_n^2 par $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on obtient

$$4S_n^3 = (n+1)\left[(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1\right]$$

$$4S_n^3 = (n+1)\left[(n+1)^3 - (2n+1)(n+1)\right]$$

$$4S_n^3 = (n+1)^2 n^2$$

soit $1^3+2^3+\ldots n^3 = \frac{(n+1)^2 n^2}{4}$.

Exercice 2

Soit $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_i x^{n-i} + \ldots + a_n$ un polynôme de degré n, à coefficients dans $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$), il possède alors n racines sur $\mathbb{C}$, notées b_1, b_2 ..., b_n et on peut écrire $P(x)$ sous la forme $P(x) = a_0(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_n)$. En développant et ordonnant le produit, on obtient

$$P(x) = a_0\left[1 - \sigma_1 x + \sigma_2 x^2 + \ldots + (-1)^i \sigma_i x^i + \ldots + (-1)^n \sigma_n\right]$$

ce qui donne les formules cherchées.

Exercice 3

La condition s'exprime par le système :

$$\left(\frac{2}{x_1} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right)\left(\frac{2}{x_2} = \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_1}\right)\left(\frac{2}{x_3} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = 0$$

et

$$x_1 x_2 x_3 \neq 0$$

Il ne reste plus qu'à exprimer ces conditions à l'aide des fonctions symétriques des racines qui valent ici :

$$\sigma_1 = x_1+x_2+x_3 = -\frac{3b}{a}, \sigma_2 = x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 = \frac{3c}{a}, \sigma_3 = x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

Si la seconde condition donne naturellement $\sigma_3 \neq 0$, la première doit être transformée. On obtient d'abord

$$(2x_2x_3 - x_1x_3 - x_1x_2)(2x_3x_1 - x_2x_1 - x_2x_3)(2x_1x_2 - x_3x_2 - x_3x_1) = 0$$

puis,

$$\begin{aligned}(3x_2x_3 - x_1x_3 - x_1x_2 - x_2x_3)&(3x_3x_1 - x_2x_1 - x_2x_3 - x_3x_1)\\ &(3x_1x_2 - x_3x_2 - x_3x_1 - x_1x_2) = 0\end{aligned}$$

soit

$$(3x_2x_3 - \sigma_2)(3x_3x_1 - \sigma_2)(3x_1x_2 - \sigma_2) = 0$$

Puis, en développant, il vient :

$$\left(9x_1x_2x_3^2 - 3\sigma_2(x_2x_3 + x_3x_1 + \sigma_2^2\right)(3x_1x_2 - \sigma_2),$$

soit

$$\begin{aligned}27x_1^2x_2^2x_3^2 - 9\sigma_2&\left(x_1x_2^2x_3 + x_3x_1^2x_2 + x_1x_2x_3^2\right)\\ &+ 3\sigma_2^2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - \sigma_2^3,\end{aligned}$$

ce qui s'écrit

$$27\sigma_3^2 - 9\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_2^3.$$

En faisant intervenir les coefficients de l'équation initiale, on obtient

$$27d^2 - 81bcd + 18c^3.$$

Finalement, on obtient $d \neq 0$ et $3d^2 - 9bcd + 2c^3 = 0$.

Exercice 4

La figure formée des affixes z_1, z_2, z_3 et z_4, solution de $P(x) = z^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s = 0$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu. Si les diagonales sont z_1z_2 et z_3z_4, la condition s'écrit $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$.

L'expression obtenue n'est pas directement symétrique par rapport aux variables. Par contre, elle est symétrique par rapport à z_1 et z_2 d'une part et z_3 et z_4 d'autre part. Nous introduisons des inconnues auxiliaires les fonctions symétrique des racines de z_1 et z_2 d'une part et de z_3 et z_4 d'autre part :

$$\varsigma = z_1 + z_2 \qquad \pi = z_1 z_2 \qquad \varsigma^\star = z_3 + z_4 \qquad \pi^\star = z_3 z_4$$

Les relations générales entre les coefficients et racines de $P(x) = 0$ s'expriment (grâce à la relation $P(x) = (x^2 - \varsigma x + \pi)(x^2 - \varsigma^\star x + \pi^\star))$ sous la forme :

$$\varsigma + \varsigma^\star = -p \tag{1}$$
$$\pi + \pi^\star + \varsigma\varsigma^\star = q \tag{2}$$
$$\pi\varsigma^\star + \pi^\star\varsigma = -r \tag{3}$$
$$\pi\pi^\star = s \tag{4}$$

et la figure est un parallélogramme si

$$\varsigma = \varsigma^\star \tag{5}$$

Alors, la figure formée des affixes z_1, z_2, z_3 et z_4, solution de $P(x) = 0$ est un losange si et seulement s'il existe 4 complexes ς, $\varsigma^\star$, π et $\pi^\star$ vérifiant les relations 1 à 5.

Les relations 1 et 5 donnent $\varsigma^\star = \varsigma^\star = -\frac{p}{2}$ et en portant ces valeurs dans les autres relations, on obtient

$$\pi + \pi^\star = q - \frac{p^2}{4} \tag{6}$$
$$\frac{p}{2}(\pi + \pi^\star) = r \tag{7}$$
$$\pi\pi^\star = s \tag{8}$$

Pour qu'il existe deux nombres π et $\pi^\star$ vérifiant ces relations, il faut et il suffit que la valeur de $\pi + \pi^\star$ obtenue de 6 vérifie la relation 7, c'est à dire que

$$\frac{p}{2}\left(q - \frac{p^2}{4}\right) \tag{9}$$

soit

$$p(4q - p^2) = 8r \tag{10}$$

Maintenant, observons qu'un parallélogramme est un losange si et seulement si ses diagonales sont, en outre, perpendiculaires. Le parallélogramme de sommets z_1, z_2, z_3, z_4 a pour affixe du point d'intersection de ses diagonales $\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4} = \frac{\sigma_1}{4}$. On peut exprimer le fait que ses diagonales soient perpendiculaires par

$$\exists\lambda \in \mathbb{R}, z_2 - \frac{\sigma_1}{4} = \lambda i \left(z_1 - \frac{\sigma_1}{4}\right).$$

On préfère cependant l'exprimer sous la forme

$$\exists\lambda \in \mathbb{C}, z_2 - \frac{\sigma_1}{4} = \lambda i\left(z_1 - \frac{\sigma_1}{4}\right) \qquad \begin{aligned} z_3 - \frac{\sigma_1}{4} &= -\left(z_1 - \frac{\sigma_1}{4}\right) \\ z_4 - \frac{\sigma_1}{4} &= -\lambda i\left(z_1 - \frac{\sigma_1}{4}\right) \end{aligned} \tag{11}$$

car, alors, la condition $\lambda \in \mathbb{R}$ est inutile puisque la colinéarité des points z_2, $\frac{\sigma_1}{4}$ et z_4 (imposé par le fait d'être un parallélogramme et donc par l'équation 10) implique que λ est réel. Les conditions de l'équation 11 permettent d'exprimer z_2, z_3, z_4 en fonction de z_1 et de λ ; ensuite, les expressions de σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 permettrons de calculer z_1 et λ en fonction de σ_3 et de σ_4 ; enfin, ces valeurs reportés dans les expressions de σ_2 donnerons une condition de compatibilité. Cette condition sera nécessaire et suffisante car elle sera équivalente à 11. On obtient

$$z_2 = \frac{\sigma_1}{4}+\lambda i\left(z_1 - \frac{\sigma_1}{4}\right) \qquad z_3 = \frac{\sigma_1}{4}-\left(z_1 - \frac{\sigma_1}{4}\right) \qquad z_4 = \frac{\sigma_1}{4}-\lambda i\left(z_1 - \frac{\sigma_1}{4}\right) \tag{12}$$

Pour faciliter les calcul, on pose $\varsigma = \frac{\sigma_1}{4}$ et $z_1 - \frac{\sigma_1}{4} = \alpha$. L'équation 12 devient

$$z_1 = \varsigma + \alpha \qquad z_2 = \varsigma + \lambda i\alpha \qquad z_3 = \varsigma - \alpha \qquad z_4 = \varsigma - \lambda i\alpha \tag{13}$$

On effectue les calculs d'abord pour σ_2 :

$$\begin{aligned} \sigma_2 =& (\varsigma+\alpha)(\varsigma+\lambda i\alpha) + (\varsigma+\alpha)(\varsigma-\alpha) + (\varsigma+\alpha)(\varsigma-\lambda i\alpha) \\ & (\varsigma+\lambda i\alpha)(\varsigma-\alpha) + (\varsigma+\lambda i\alpha)(\varsigma-\lambda i\alpha) + (\varsigma-\alpha)(\varsigma-\lambda i\alpha) \end{aligned} \tag{14}$$

soit

$$\sigma_2 = 6\varsigma^2 + \alpha^2(\lambda^2 - 1) \tag{15}$$

puis pour σ_3 :

$$\begin{aligned} \sigma_3 =& (\varsigma+\alpha)(\varsigma+\lambda i\alpha)(\varsigma-\alpha) + (\varsigma+\alpha)(\varsigma+\lambda i\alpha)(\varsigma-\lambda i\alpha) + (\varsigma+\alpha)(\varsigma-\alpha)(\varsigma-\lambda i\alpha)) \\ & + (\varsigma+\lambda i\alpha)(\varsigma-\alpha)(\varsigma-\lambda i\alpha) \end{aligned} \tag{16}$$

soit

$$\sigma_3 = 4\varsigma^3 + 2\varsigma\alpha^2(\lambda^2 - 1) \tag{17}$$

et, enfin, pour σ_4 :

$$\sigma_4 = (\varsigma+\alpha)(\varsigma+\lambda i\alpha)(\varsigma-\alpha)(\varsigma-\lambda i\alpha) \tag{18}$$

soit

$$\sigma_4 = (\varsigma^2 - \alpha^2)(\varsigma^2 + \lambda^2\alpha^2) \tag{19}$$

Arrivé à ce point, on s'aperçoit que le calcul explicite des valeurs de λ et de α est inutile car si les équations 17 et 19 nous permettent de calculer α^2 et λ^2, la condition de compatibilité s'exprime via la valeur de $2\varsigma\left(\alpha^2(\lambda^2-1)\right)$ commune à 15 et à 17. on obtient

$$\sigma_3 - 4\varsigma^3 = 2\varsigma\sigma_2 - 12\varsigma^3 \tag{20}$$

soit

$$32\sigma_3 = 16\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_1^3 \tag{21}$$

soit encore, en revenant aux coefficients du polynôme initial

$$-32r = p(3p^2 - 16q) \tag{22}$$

Donc la condition pour que la figure formée des affixes z_1, z_2, z_3 et z_4 forme un losange s'exprime par les relations 10 et 22, soit

$$\begin{cases} p(4q - p^2) = 8r \\ 32r = p(16q - 3p^2) \end{cases}$$

Si on avait voulu aller plus loin en exprimant que la figure formée des affixes z_1, z_2, z_3 et z_4 forme un carré, il suffirait d'écrire, de plus, que $\lambda = 1$, via les relations 15 et 17, obtenant, ainsi, les trois conditions suivantes :

$$\begin{cases} p(4q - p^2) = 8r \\ 8q = 3p^2 \\ 16r = p^3 \end{cases}$$

Exercice 5

L'expression s'écrit

$$\frac{a^2c + c^2a + ab^2 + ba^2 + b^2c + c^2b}{abc}$$

soit

$$\frac{a^2c + c^2a + ab^2 + ba^2 + b^2c + c^2b + \mathbf{3abc} - \mathbf{3abc}}{abc}$$

soit

$$\frac{\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3}{\sigma_3}$$

Exercice 6

En supposant sans perte de généralité que $x \leq y$, on considère les inconnues x et y comme les deux premiers termes d'une progression arithmétique de premier terme x et de raison $y - x$; on introduit, en outre, les fonctions symétriques de x et de y à savoir $s = x + y$ et $p = xy$. Pour $n = 2$, on a

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 && = a^2 + 1 + 2p \\ &= (a+1)^2 && = a^2 + 2a + 1 \end{aligned}$$

Il vient $s = a + 1$ et $p = a$. Donc x et y sont nécessairement solutions de l'équation $X^2 - (a+1)X + a = 0$. Donc, les seules solutions possibles sont $(a, 1)$ et $(1, a)$. On vérifie qu'elles satisfont le système initial.

Pour $n = 3$, on a

$$\begin{aligned}(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 &= a^3 + 1 + 3sp \\ = (a+1)^3 &= a^3 + 3a^2 + 3a + 1\end{aligned}$$

Il vient $s = a + 1$ et $sp = a(a + 1)$. On obtient si $a + 1 \neq 0$ $s = a + 1$ et $p = a$ et sinon $s = p = 0$. Donc x et y sont nécessairement solutions d'une des équations

$$\begin{aligned}&\text{Si } a+1=0, && X^2 = 0\\ &\text{Si } a+1\neq 0, && X^2 - (a+1)X + a = 0\end{aligned}$$

Les solutions possibles sont alors

$$\begin{aligned}&\text{Si } a=-1, && (0,0)\\ &\text{Si } a\neq -1, && (a,1) \text{ et } (1,a)\end{aligned}$$

On vérifie qu'elles satisfont toujours le système initial. En outre si on écrit l'équation $x^3 + y^3 = a^3 + 1$ sous la forme $x^3 + (a + 1 - y)^3 = a^3 + 1$, elle se réduit à une équation du second degré.

Pour $n = 4$, on a

$$\begin{aligned}(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 &= a^4 + 1 + 4ps^2 - 2p^2 \\ = (a+1)^4 &= a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1\end{aligned}$$

Il vient $s = a + 1$ et $4ps^2 - 2p^2 = 4a^3 + 6a^2 + 4a = 4a(a + 1)^2 - 2a^2$. On obtient si $a + 1 \neq 0$ $s = a + 1$ et $2(p - a)(a + 1)^2 = p^2 - a^2$ et sinon $s = 0$ et $p^2 = a^2$.
On résout alors l'équation en p

$$2(p-a)(a+1)^2 = p^2 - a^2$$

de racines $p = a$ et $p = 2(a + 1)^2 - a = 2a^2 + 3a + 2$.
On obtient donc les 4 cas suivants :

$$\text{Si } a = -1 \text{ et } p = a, \qquad X^2 + a = 0 \tag{23}$$
$$\text{Si } a = -1 \text{ et } p = -a, \qquad X^2 - a = 0 \tag{24}$$
$$\text{Si } a + 1 \neq 0 \text{ et } p = a, \qquad X^2 - (a+1)X + a = 0 \tag{25}$$
$$\text{Si } a + 1 \neq 0 \text{ et } p = 2(a+1)^2 - a, \qquad X^2 - (a+1)X + 2(a+1)^2 - a = 0 \tag{26}$$

Les solutions possibles sont alors, en désignant par ξ_1 et ξ_2 les racines de $X^2 - (a + 1)X + 2(a + 1)^2 - a = 0$

$$\begin{aligned}&\text{Si } a=-1, && (1,0)(-1,0)(i,0)(-i,0)\\ &\text{Si } a\neq -1, && (a,1)(1,a)(\xi_1, a+1-\xi_1)(\xi_2, a+1-\xi_2)\end{aligned}$$

On vérifie que, dans le cas $a = -1$, les 4 solutions trouvées conviennent.
Les 4 autres solutions conviennent aussi car l'équation $Z^4 + (a+1-Z)^4 = a^4 + 1$ a exactement 4 racines dans $\mathbb{C}$ dont les seules valeurs possibles sont 1, a, ξ_1 et ξ_2.