Exercice 1

La figure 1 représente les premières valeurs de l'ordre $<$ sur $\mathbb{N}^2$ reportées sur la grille.

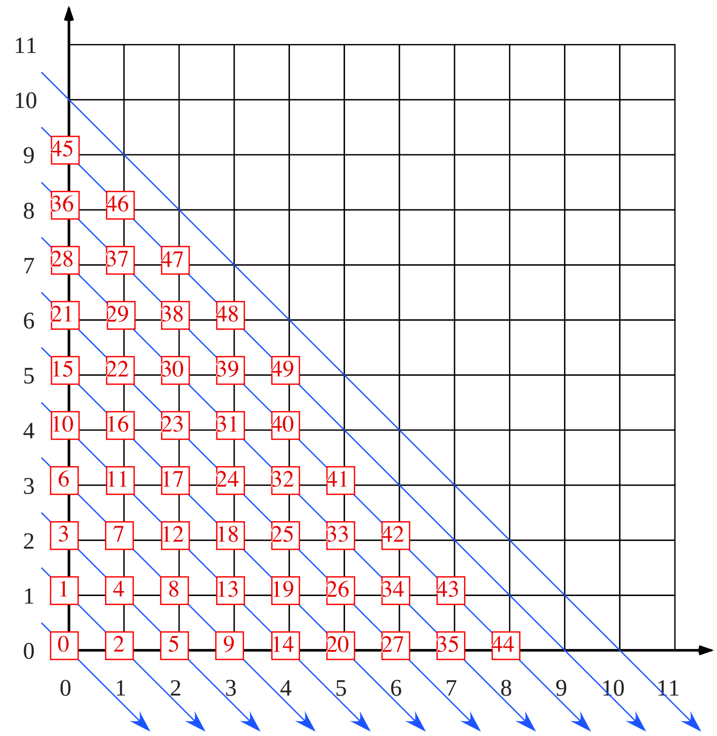

FIG. 1 – Bijection χ entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$.

Pour tout élément (a, b) de $\mathbb{N}^2$, il existe un nombre fini d'éléments de $\mathbb{N}^2$ qui lui sont inférieurs, notons $\chi(a, b)$ ce nombre. On observe que si $(a, b) \neq (c, d)$, alors $\chi(a, b) \neq \chi(c, d)$ par définition de $<$ et que $\chi(0, 0) = 0$. Alors χ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$ qui respecte évidemment l'ordre. Donnons nous alors un autre isomorphisme Ξ de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$, alors le nombre d'éléments de $\mathbb{N}^2$ qui sont inférieurs à $\Xi^{-1}(n)$ est n et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \Xi^{-1}(n) = \chi^{-1}(n)$$

d'où l'égalité entre Ξ et χ.

On commence par calculer $\chi(a, b)$: le nombre d'éléments inférieurs à (a, b) est le nombre d'élément sur les diagonales $x + y = i$ avec $i < a + b$ et le nombre d'éléments sur la diagonale $x + y = a + b$ inférieurs à a (soit a). On obtient

$$\chi(a, b) \sum_{i=0}^{i=a+b-1} i + 1 + a = \frac{(a + b + 1)(a + b)}{2} + a = \frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2 + 3a + b)$$

On a $\chi(a,b) = a + \frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2 + a + b)$ et donc $\Pi_1(x) \leq x$ (avec $x = (a,b)$). L'égalité se produit pour $a^2 + 2ab + b^2 + a + b = 0$ ce qui implique $a = 0$ et $b = 0$ et donc $x = 0$.
On a $\chi(a,b) = ab + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + 3a + b)$ et donc, si $a \neq 0$, $\Pi_2(x) \leq x$ (avec $x = (a,b)$) ; si $a = 0$, on a $b < \frac{1}{2}(b^2 + b)$ et donc $\Pi_2(x) \leq x$. Si $a = 0$, l'égalité se produit pour $b = 0$ et, donc, $x = 0$. Si $a \neq 0$, l'égalité se produit pour $b = b + \frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2 + 3a - b)$ soit $(a+b)^2 = 3a - b$ ce qui implique $a = 0$ ou $a = 1$. Il reste le cas $a = 1$ qui implique $b = 0$. Donc $\Pi_2(x) = x$ implique $x = 0$ ou $x = 1$.

Exercice 2

Il est facile de voir par récurrence que χ_p ($p \geq 2$) est une bijection entre $\mathbb{N}^p$ et $\mathbb{N}$ et qu'elle s'exprime par un polynôme de degré 2^{p-1}. En effet, $\chi_2 = \chi$ s'exprime par un polynôme de degré 2 et si χ_p est de degré 2^{p-1}, alors $\chi_{p+1}(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}) = \chi\left(\chi_p(x_1, \ldots, x_p), x_{p+1}\right)$ est de degré 2 sur des monômes de degré 2^{p-1} et est donc de degré 2^p. On en déduit que σ est une bijection de $\mathrm{Seq}(\mathbb{N})$ sur $\mathbb{N}$ et qu'elle s'exprime par un polynôme de degré 2^p où p est le nombre d'éléments de la suite puisque χ_p s'exprime par un polynôme de degré 2^{p-1}.

Exercice 3

On montre que $N(p,S) = \binom{p-1}{S+p-1}$ par récurrence sur p.
Si $p = 2$, $N(2,S) = |\{x | x + S - x = S\}| = S + 1 = \binom{1}{S+1}$.
Pour $p \geq 2$,

$$N(p+1,S) = \sum_{j=0}^{j=S} N(p, S-j) = \sum_{j=0}^{j=S} \binom{p-1}{S-j+p-1}$$

Rappelons la formule « bien connue » :

$$\binom{p}{n} = \binom{p-1}{n-1} + \binom{p-1}{n-2} + \ldots + \binom{p-1}{p} + + \binom{p-1}{p-1}$$

Il vient par cette formule $N(p+1,S) = \binom{p}{S+p}$, ce qui achève la récurrence.
L'égalité $\sum_{i=0}^{S-1} N(p,i) = \binom{p}{S+p-1}$ est une conséquence directe de la formule rappelée.

Exercice 4

On raisonne comme dans le cas de l'exercice 1. On fixe p. On vérifie facilement que $<_p$ est une relation d'ordre. A tout p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ de $\mathbb{N}^p$, on fait correspondre le nombre d'éléments de $\mathbb{N}^p$ qui sont strictement inférieurs pour $<_p$ à $(x_1, \ldots, x_p)$, noté $L_p(x_1, \ldots, x_p)$. De même que dans

l'exercice 1, L_p est une bijection de $\mathbb{N}^p$ sur $\mathbb{N}$ qui respecte l'ordre et c'est, en outre, l'unique isomorphisme entre $(\mathbb{N}^p, <_p)$ et $(\mathbb{N}, <)$. Montrons que $L_p(x_1, \ldots, x_p)$ s'exprime par un polynôme de degré p par récurrence sur p :
Pour $p = 2$, L_2 est l'isomorphisme χ de

$$L_p(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{i=0}^{x_1+\ldots+x_p-1} N(p,i) + L_{p-1}(x_1, \ldots, x_{p-1})$$

$$= \frac{(x_1, \ldots, x_p)(x_1, \ldots, x_p + 1) \ldots (x_1, \ldots, x_p + p - 1)}{p!} + L_{p-1}(x_1, \ldots, x_{p-1})$$

Donc, $L_p(x_1, \ldots, x_p)$ est la somme d'un polynome de degré p et de $L_{p-1}(x_1, \ldots, x_{p-1})$, polynôme de degré $p-1$ par hypothèse de récurrence et est, alors, un polynôme de degré p.

Exercice 5

Soit m un entier fixé et supposons que poue tout i de $\{1, \ldots, p\}$, $|x_i| \leq m$, alors

$$|P(x_1, \ldots, x_p)| \leq m^q A$$

où A est la somme des valeurs absolues des coefficients de P.
Donc P est une injection de $\{(x_1, \ldots, x_p) \mid \forall i,\ |x_i| \leq m\}$, ensemble à m^p éléments, dans un ensemble à Am^q éléments. Donc $Am^{q-p} \geq 1$. Lorsque m tend vers l'infini, Am^{q-p} ne tend pas vers 0 si et seulement si $q > p$.
mbox

Exercice 6

La fonction $(i,j) \mapsto 2^i(2j+1) - 1$ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$ car elle admet une inverse. Soit $x \in \mathbb{N}$, alors il existe un unique entier i tel que $x+1$ soit divisible par 2^i mais pas par 2^{i+1} ; donc i est déterminé de façon unique. Alors, $x+1$ s'écrit $2^i\alpha$ avec α impair, donc α s'écrit de manière unique $2j+1$ et j est déterminé de façon unique.
L est une appliication de l'ensemble des suites finies d'entiers dans $\mathbb{N}$.
L est surjectif car l'image de la suite vide est 0 et par ce qui précède lorsque p et $L_p(x_1, \ldots x_p)$ décrivent $\mathbb{N}^2$, $L(< x_1 \ldots x_p >)$ décrit $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si $L(< x_1 \ldots x_p >) = L(< y_1 \ldots y_q >) = a$, alors $p = q$ comme étant l'unique entier tel que 2^h divise a mais pas 2^{h+1}. ; puis $L_p(x_1 \ldots x_p) = L_p(y_1 \ldots y_p)$ (comme unique quotient, et, finalement $(x_1 \ldots x_p) = (y_1 \ldots y_p)$ par bijectivité de L_p.
Puisque L_p s"exprime par un polynôme de degré p (exercice 4), $L_p(x_1 \ldots x_p)$ s'exprime aussi par un polynôme de degré p.
mbox

Exercice 7

Soient $x \in \mathbb{N}$, p et i, posons $a_i = \Pi_{p,i}(x)$; alors $\forall a'_1, \ldots, a'_{i-1}, a'_{i+1}, \ldots, a'_p$, $a'_1 + \ldots + a'_{i-1}, a_i + a'_{i+1} + \ldots + a'_p \geq a_i$.
Dans l'ordre $<_p$ de l'exercice 4, le nombre d'éléments plus petit que $(x_1, \ldots, x_p) = L_p^{-1}(x)$ est au moins égal à $\Sigma_{i=0}^{x_1+\ldots+x_p-1} N(p,i)$. Par conséquent, il est supérieur ou égal à $\Sigma_{i=0}^{a_i-1} N(p,i)$. On a donc

$$x \geq \frac{a_i(a_i+1)\ldots(a_i+p-1)}{p!}$$

soit

$$x \geq \frac{a_i}{1}\frac{a_i+1}{1+1}\ldots\frac{a_i+p-1}{1+p-1}.$$

Or pour $a_i \geq 1$ tous ces rapports sont supérieurs ou égal à 1, on a donc $x \geq \Pi_{p,i}(x)$. En outre si $a_i > 1$, les rapports sont strictement supérieurs à 1 et on a $x > \Pi_{p,i}(x)$. Il reste à examiner le cas $\Pi_{p,i}(x) = 0$. On a alors évidemment $x \geq \Pi_{p,i}(x)$.
Par ce qui précède les cas d'égalité ne peuvent être obtenus que pour $\Pi_{p,i}(x) = 0$ ou $\Pi_{p,i}(x) = 1$. Si $\Pi_{p,i}(x) = 0$, on a égalité : $L_p(0, \ldots, 0) = 0$. Si $\Pi_{p,i}(x) = 1$, l'égalité ne peut avoir lieu que pour $x = 1$. On vérifie que $\Pi_{p,1}(1) = 1$,