Exercice : voir les résultats du problème précédent

On considère l'équation linéaire $Ax = b$ où $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est une matrice inversible et b un vecteur de $\mathbf{C}^n$. La résolution directe de cette équation s'avère parfois délicate, on lui préfère alors la méthode des approximations successives. Pour mettre en œuvre cette méthode, on décompose la matrice A sous la forme $A = M - N$ où M est une matrice facilement inversible (par exemple triangulaire), l'équation $Ax = b$ est alors équivalente à l'équation $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$. Une méthode itérative associée à cette décomposition consiste à introduire la suite définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbf{C}^n \\ x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b \end{cases}$$

Si cette suite converge, c'est nécessairement vers la solution de l'équation $Ax = b$.

1. Montrer que la méthode itérative associée à la décomposition $A = M - N$ est convergente si, et seulement si, $\rho(M^{-1}N) < 1$.
2. La méthode de Jacobi est la méthode itérative associée à la décomposition $A = D - N$ où $D = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$. Voici un exemple d'une situation où la méthode de Jacobi est convergente.
   (a) Une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est dite à diagonale strictement dominante si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$. Montrer qu'une telle matrice est inversible.
   (b) Montrer que si A est à diagonale strictement dominante alors la méthode de Jacobi est convergente.

Problème

Dans tout le problème a et b désignent deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to [a, b]$, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Un cas particulier du théorème du point fixe

1. Justifier l'existence de $k = \sup_{y\in[a,b]} |f'(y)|$ puis montrer que $\forall x \in [a, b]$, $|f(x) - f(x')| \leqslant k|x - x'|$.

On suppose dans toute la suite du problème que $\mathbf{k < 1}$.

2. Montrer qu'il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$ et que l'itération définie par : $x_0 \in [a, b]$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers c.
3. On définit l'erreur à la n-ième itération par : $e_n = x_n - c$. Montrer que :

$$|e_n| \leqslant \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$$

Le procédé Δ_2 d'Aitken

On suppose dans toute la suite du problème que f' ne s'annule pas sur $[a, b]$.

1. Montrer que si $e_0 \neq 0$, alors $\forall n \in \mathbf{N}$, $e_n \neq 0$. Que dire si $e_0 = 0$?

On suppose, dans la suite, que $e_0 \neq 0$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} - x_n \neq 0$.
3. Montrer que $\dfrac{e_{n+1}}{e_n}$ tend vers $f'(c)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Pour tout entier n, on pose : $x'_n = x_n - \dfrac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$.
   (a) Justifier l'existence de x'_n et montrer que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x'_n - c}{x_n - c} = 0$.
   (b) Commenter ce résultat.

La méthode de Steffensen

Soit $g : [a, +\infty[\to [a, +\infty[$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, telle que g' soit croissante et strictement négative. On pose, pour $x \in [a, +\infty[$, $N(x) = g(g(x)) - 2g(x) + x$.

1. Montrer qu'il existe un unique $d \in [a, +\infty[$ tel que $g(d) = d$.
2. Soit $x \in [a, +\infty[$, $x \neq d$. Montrer qu'il existe y_1 et y_2 dans $[a, +\infty[$ tels que :

$$\begin{aligned} g(x) - x &= (g'(y_1) - 1)(x - d) \qquad \text{et} \\ N(x) &= [(g'(y_1) - 1)^2 + (g'(y_2) - g'(y_1))g'(y_1)](x - d) \end{aligned}$$

3. Montrer que $N(x) = 0$ si et seulement si $x = d$.
4. On pose, pour $x \in [a, +\infty[$,

$$G(x) = \begin{cases} x - \dfrac{(g(x) - x)^2}{N(x)} & \text{si } x \neq d \\ d & \text{si } x = d. \end{cases}$$

   Montrer que G est une fonction dérivable de $[a, +\infty[$ dans $[a, +\infty[$. Que vaut $G'(d)$?
5. On définit la suite $(x''_n)_{n \in \mathbf{N}}$ par : $x''_0 \in [a, +\infty[$ et $x''_{n+1} = G(x''_n)$. Montrer que $(x''_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers d.

Application numérique (avec une machine !)

On cherche à estimer numériquement la solution de l'équation $\exp(-x) = x$.

1. Montrer que l'on peut mettre en œuvre les trois algorithmes étudiés dans le problème.
2. En prenant $x_0 = x''_0 = 0,5$, calculer la solution de l'équation à 10^{-6} près. Donner le nombre d'itérations nécessaires permettant de parvenir à la précision souhaitée pour chacun des algorithmes.