Exercices

1 Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi,\pi[$ par $f(x)=|x|$.

1. Écrire le développement en série de Fourier de f.
2. En déduire les valeurs des sommes $S=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ et $T=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$.

2 Soit $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[0,2\pi[$ par : $f(t)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{si } t=0,\\ 1 & \text{si } t\in]0,\pi[,\\ \frac{1}{2} & \text{si } t=\pi,\\ 0 & \text{si } t\in]\pi,2\pi[.\end{cases}$

1. Écrire la série de Fourier de f et justifier sa convergence vers f.
2. En déduire la valeur de la somme $S=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

3 On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y''+y=|\sin t|$.

1. Montrer que $\forall t\in\mathbb{R}$, $|\sin t|=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nt)}{(4n^2-1)}$.
2. Utiliser le principe de superposition pour trouver une solution particulière de (E) puis résoudre (E).

4 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et continue dont on désigne par $c_n(f)$ les coefficients de Fourier exponentiels. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pout $t\in\mathbb{R}$, on pose :

$$S_n(f)(t)=\sum_{k=-n}^{n}c_k(f)\,\mathrm{e}^{ikt}\quad\text{et}\quad\sigma_n(f)(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k(f)(t).$$

Il s'agit, dans cet exercice, de montrer le théorème de Fejèr : la suite de fonctions $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

On définit le noyau de Dirichlet et le noyau de Fejèr respectivement par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad D_n(t)=\sum_{k=-n}^{n}\mathrm{e}^{ikt}\qquad\text{et}\qquad F_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}D_k(t).$$

1. Vérifier que $\forall t\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $D_n(t)=\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}$ et $F_n(t)=\dfrac{1}{n}\dfrac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}$ et que $\forall t\in 2\pi\mathbb{Z}$, $D_n(t)=2N+1$ et $D_n(t)=N$.
2. Montrer que $\forall t\in\mathbb{R}$, $S_n(f)(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(t-s)D_n(s)\,\mathrm{d}s$ et $\sigma_n(f)(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(t-s)F_n(s)\,\mathrm{d}s$.
3. Montrer que la fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
4. Établir alors le théorème de Fejèr.
5. En déduire le théorème d'approximation de Weierstrass : *toute fonction continue sur* $[0,1]$ *est limite uniforme de fonctions polynômes.*

5 Dans cet exercice, on utilisera les coefficients de Fourier exponentiels.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, continue et de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\ \mathrm{d}t = 0$. Montrer l'inégalité de Wirtinger
$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\ \mathrm{d}t \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\ \ \mathrm{d}t.$$
Montrer qu'il ne peut y avoir égalité que s'il existe des complexes a et b tels que :
$$f(t) = a\cos t + b\sin t.$$

2. Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$. Montrer l'inégalité de Poincaré
$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\ \ \mathrm{d}t \leq 4\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\ \ \mathrm{d}t.$$

6 On souhaite établir l'inégalité isopérimétrique : pour une courbe Γ simple, de classe $\mathscr{C}^1$ et régulière, si l'on désigne par L sa longueur et par A l'aire du domaine qu'elle délimite, alors :
$$4\pi A \leqslant L^2,$$
l'égalité n'ayant lieu que lorsque Γ est un cercle.

A cette fin :
- on utilise une paramétrisation de $\Gamma : s \mapsto M(s)$ qui est normale ($\forall s \in [0, L], \|M'(s)\| = 1$) que l'on considère comme périodique de période L car Γ est fermée ;
- on se ramène ensuite à l'intervalle $[0, 2\pi]$ en posant $f(t) = M\left(\dfrac{Lt}{2\pi}\right)$;
- on a alors, en interprétant f comme une fonction complexe $f(t) = x(t) + iy(t)$,
$$A = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y'(t)\ \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $L^2 = 2\pi \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2\ \mathrm{d}t$.
2. En déduire que $L^2 - 4\pi A = 2\pi\left(\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (x'^2(t) - x^2(t))\ \ \mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} (x(t) - y'(t))^2\ \mathrm{d}t\right)$.
3. Conclure en utilisant l'inégalité de Wirtinger, et en supposant d'abord, que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\ \mathrm{d}t = 0$.