Séance du 19 septembre 2007 avec M. Laffont

Exercice 1

a. Soit $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in \mathbf{Q[X]}$; démontrer que l'équation algébrique $P(x) = 0$ est équivalente à une équation algébrique dont les coefficients sont entiers et premiers entre-eux dans leur ensemble.

b. On suppose pour la suite que les a_i sont entiers et soit $r = \dfrac{p}{q}$ où $p \wedge q = 1$, une racine rationnelle de P ;

démontrer que : p divise a_0 , q divise a_n , $p - q$ divise $P(1)$, $p + q$ divise $P(-1)$

c. Déterminer les racines du polynôme $P = 2X^3 - X^2 - X - 3$.

Exercice 2

a. Soit un entier n naturel , déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $P = (X+1)^3$

b. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, déterminer A^n .

Exercice 3

Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, le système $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 24 \end{cases}$

Exercice 4

Le polynôme $aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbf{C[X]}$ ($a \neq 0$) et on se propose de déterminer ses racines.

a. Montrer qu'on peut se ramener à rechercher les racines d'un polynôme $Q = X^3 + pX + q$.

Soient α , β, γ les racines de Q ; on pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $t = \alpha + \beta j + \gamma j^2$, $u = \alpha + \beta j^2 + \gamma j$;

b. déterminer α , β et γ en fonction de t et u .

c. déterminer un polynôme du second degré dont t^3 et u^3 sont les racines.

d. on suppose que p et q sont réels et que $4p^3 + 27q^2$ est positif, déterminer les racines de Q.

e. déterminer les racines du polynôme $P = X^3 - 3X^2 + X - 1$.

Exercice 5

a. Soit $f \in C^4([a\,;b]\,;\mathrm{IR})$, justifier l'existence d'une fonction polynôme p de degré inférieur ou égal à 3 telle que:

$p(a) = f(a)$, $p\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $p'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $p(b) = f(b)$.

b. Pour t appartenant à $]a\,;b[$ et différent de $\frac{a+b}{2}$, soit g_t la fonction définie sur $[a\,;b]$ par :

$$g_t(x) = f(x) - p(x) - \frac{f(t) - p(t)}{(t-a)\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2(t-b)}(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2(x-b) .$$

Démontrer en utilisant le théorème de Rolle, qu'il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $g_t^{(4)}(c) = 0$.

c. En déduire que : pour tout $t \in [a\,;b]$, $|f(t) - p(t)| \leq \frac{M}{4!}(t-a)\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2(b-t)$ où $M = \sup\limits_{t \in [a;b]} \left|f^{(4)}(t)\right|$

d. Démontrer que : $\left|\int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]\right| \leq \frac{M(b-a)^5}{2880}$ *(méthode de Simpson)*

Exercice 6

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$), on considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y = \dfrac{1}{x}$; soient P un point de $\mathcal{H}$, Q le symétrique de P par rapport à O et $\mathcal{C}$ le cercle de centre P et de rayon PQ ; le cercle coupe l'hyperbole en Q et trois autres points qu'on note A, B et C.

a. Démontrer que P est centre de gravité du triangle ABC.

b. En déduire que ABC est équilatéral.