Corrigé partiel du devoir Ag.int. 11/06/08 . gc.

Partie 1.

1. E et E_σ sont des sev de $\mathcal{C}$[a,b].
On définit $\psi : f \to (f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n))$,application de E_σ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.
Elle est linéaire et $f(x_0) = f(x_1) = ... = f(x_n) = 0$ entraîne que $f = 0$. Ker (ψ) =0, ψ est donc injective.
On définit pour tout $i \in [0, n]$ la fonction $u_i \in E_\sigma$ ainsi : u_i est nulle en dehors de $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, vaut 1 en x_i, affine sur $[x_{i-1}, x_i]$ et sur $[x_i, x_{i+1}]$. (son graphe est un triangle).

Soit $f \in E_\sigma$. $g = f - \sum_o^n f(x_i)u_i$ est aussi dans E_σ. On remarque que $\psi(g) = 0$, donc $g = 0 \iff f = \sum_o^n f(x_i)u_i$. Le système (u_i) engendre E_σ. Il est facile de montrer qu'il est libre.
$\dim(E_\sigma) = n{+}1 = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$. Donc, ψ étant injective est un isomorphisme de E_σ onto $\mathbb{R}^{n+1}$

2. Soit une combinaison linéaire nulle des (v_i) : $\sum_0^n \lambda_i v_i = 0$. Supposons que $\lambda_n \neq 0$.

Alors $\lambda_n v_n = -\sum_0^{n-1} \lambda_i v_i$. Le second membre est dérivable en x_n alors que le premier ne l'est pas. Contradiction.
Donc $\lambda_n = 0$. De même, tous les autres λ_i sont nuls et les (v_i) sont libres. Ils constituent une base de E_σ.

3. La fonction f est continue donc uniformément continue sur [a,b] :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, x') \in$ [a,b], $|x - x'| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$. Supposons ϕ_n croissante sur $[x_i, x_{i+1}]$.
$\forall x \in [x_i, x_{i+1}], \phi_n(x) - f(x) \leq \phi_n(x_{i+1}) - f(x) = f(x_{i+1}) - f(x)$.
$\forall x \in [x_i, x_{i+1}], \phi_n(x) - f(x) \geq \phi_n(x_i) - f(x) = f(x_i) - f(x)$.
Supposons que $n \geq N_0 \Longrightarrow \dfrac{b-a}{n} \leq \alpha$,alors$|\phi_n(x) - f(x)| \leq$ Max $[|f(x_i) - f(x)|, |f(x_{i+1}) - f(x)|] \leq \varepsilon$.
conclusion : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0, \forall x \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, $|\phi_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. La suite ϕ_n tend uniformément vers f sur [a,b].

4. Si E était complet, il serait fermé. D'après 3., la fonction $x \to x^2$ continue qui est limite uniforme d'une suite ϕ_n devrait être dans E. Absurde.
Si E était de dim finie, il serait complet.

Partie 2.

1. f_n est un polynôme impair de degré $2n + 1$ et g_n est un polynôme pair de degré $2n + 2$.
2. Les inégalités demandées sont évidentes. Soit $x > 0$.

$$\int_x^1 (1 - t^2)^n \,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{x} \int_x^1 t(1 - t^2)^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x(n+1)}(1 - x^2)^{n+1}.$$
$$\int_0^1 (1 - t^2)^n \,\mathrm{d}t \geq \int_0^x (1 - t^2)^n \,\mathrm{d}t \geq x(1 - x^2)^n.$$

On en déduit : $|f_n(x) - 1| = \dfrac{\int_x^1 (1 - t^2)^n}{\int_0^1 (1 - t^2)^n} \leq \dfrac{1 - x^2}{x^2(2n + 2)}$. D'où la convergence simple de f_n vers 1 sur]0,1].

Soit $\lambda > 0$. $\forall x \in [\lambda, 1], |f_n(x) - 1| \leq \dfrac{1 - x^2}{x^2(2n + 2)} \leq \dfrac{1}{\lambda^2(2n + 2)}$.

Cette fois, on obtient la convergence uniforme de f_n vers 1 sur tout $[\lambda, 1]$.

$\lim_{x \to 0} (f_n(x) - 1 = -1$. Donc $\sup_{x > 0} |(f_n(x) - 1)|$ ne tend pas vers zéro. Pas de conv uniforme sur]0,1] !

3. Ecrivons $\displaystyle\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t - x = \int_0^x (f_n(t)-1)\,\mathrm{d}t = \int_0^\varepsilon (f_n(t)-1)\,\mathrm{d}t + \int_\varepsilon^x (f_n(t)-1)\,\mathrm{d}t$.

• $\displaystyle|\int_0^\varepsilon (f_n(t)-1)\,\mathrm{d}t| = \int_0^\varepsilon (1-f_n(t))\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon$.

• f_n tend uniformément vers 1 sur $[\varepsilon,1]$. Donc $\displaystyle\int_\varepsilon^x (f_n(t)-1)\,\mathrm{d}t \to x-\varepsilon$.

de plus, $\displaystyle|\int_\varepsilon^x f_n(t)\,\mathrm{d}t - (x-\varepsilon)| = |\int_\varepsilon^x (f_n(t)-1)\,\mathrm{d}t| \leq \int_\varepsilon^1 (1-f_n(t))\,\mathrm{d}t$.

Grâce à la cv uniforme de f_n vers 1 sur $[\varepsilon,1]$, il existe N_0 tel que $n \geq N_0 \Longrightarrow \int_\varepsilon^1 (1-f_n(t))\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon$.
remarque 1 : cette majoration ne dépend pas de x !
remarque 2 : il n'y a pas d'inconvénient à reprendre le même ε dans la majoration.
On en déduit $\forall x \geq \varepsilon$: $\displaystyle|\int_\varepsilon^x f_n(t)\,\mathrm{d}t - x| \leq 2\varepsilon$.

Enfin,en considérant les majorations sur $[0,\varepsilon]\cup[\varepsilon,1]$: $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, \forall x \in [0,1], \displaystyle|\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t - x| \leq 3\varepsilon$.
Conclusion : g_n tend vers $x \to x$ uniformément sur [0,1].

4.a. g_n étant paire, elle tend uniformément vers $x \to |x|$ sur [-1,1].
$x \to g_n(x-a)$ tend uniformément vers $x \to |x-a|$ sur [a-1,a+1].
Soit (x_i) une subdivision de [0,1]. g_n tend alors uniformément vers v_i sur $[x_i-1, x_i+1]$ et aussi sur [0,1] puisque [0,1] $\subset [x_i-1, x_i+1]$.

4.b. Toute fonction v_i est donc limite uniforme d'une suite de polynômes sur [0,1]. Il en est de même de toute fonction de E qui est combinaison linéaire de fonction (v_i).
Soit $\mathcal{P}$ l'espace des fns polynômes sur [0, 1]. Donc $\mathrm{E} \subset \overline{\mathcal{P}} \Longrightarrow \overline{\mathrm{E}} \subset \overline{\mathcal{P}} \Longrightarrow \mathcal{C}[0,1] \subset \overline{\mathcal{P}}$, ce qui signifie que toute fn continue est limite uniforme sur [0,1] d'une suite de polynômes.
Remarque : les espaces sont normés par la norme de la convergence uniforme.

5.b. Posons $\forall x \in [0,1]$, $g(x) = f(a+x(b-a))$ et $u = a+x(b-a)$. Si g est cont sur [0,1], alors $u \to f(u)$ l'est sur [a,b]. Soit Q_n qui tend vers g uniformément sur [0,1].
Alors $Q_n(\dfrac{u-a}{b-a})$ tend vers f uniformément sur [a,b].

Partie 3.

1. $B_n(1) = 1, B_n(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$.
2. Par linéarité de $f \to \mathrm{B}_n(f)$, il suffit de montrer la formule sur une base de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
indication de correction : développer $\dfrac{\mathrm{X}(1-\mathrm{X})}{n}(B_n(\mathrm{X}^k))'$.

3.Soit $\boxed{\mathcal{P}(p) :\ \forall p \in \mathbb{N}, \forall i \leq p,\ (B_n(\mathrm{X}^p))^{(i)} \text{ cv unif. vers } (\mathrm{X}^p)^{(i)} \text{ sur } [0,1].}$

$\mathrm{X}^0 = 1, B_n(1) = 1 \to 1$ unif. sur [0,1]. Donc, $\mathcal{P}(0)$ est vraie et supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie.
$B_n(\mathrm{X}^{p+1}) = \dfrac{\mathrm{X}(1-\mathrm{X})}{n}(B_n(\mathrm{X}^p))' + \mathrm{X}B_n(\mathrm{X}^p)$ tend unif. sur [0,1] vers X^{p+1}. En effet :

•$u_n = \dfrac{\mathrm{X}(1-\mathrm{X})}{n} \to 0$ unif. sur [0,1] et $(B_n(\mathrm{X}^p))' \to (\mathrm{X}^p)'$ unif. sur [0,1] (H.R.)

•$B_n(\mathrm{X}^p) \to \mathrm{X}^p$ unif. sur [0,1] (H.R.), donc $\mathrm{X}B_n(\mathrm{X}^p) \to \mathrm{X}^{p+1}$ unif. sur [0,1].

remarque : (on a utilisé $f_n \to f$ et $g_n \to g$ unif. $\Longrightarrow f_n g_n \to fg$ unif.).

Soit $k \in [2, p+1]$: $(B_n(\mathrm{X}^{p+1}))^{(k)} = \sum\limits_{i=0}^{i=2} \mathrm{C}_k^i u_n^{(i)} (B_n(\mathrm{X}^p))^{(k-i)} + \sum\limits_{i=0}^{i=1} \mathrm{C}_k^i \mathrm{X}^{(i)} i (B_n(\mathrm{X}^p))^{(k-i)}$.
(Dérivée d'ordre k obtenue grâce à Leibnitz en remarquant que u_n est de degré 2 et X de degré 1.)

$u_n^{(i)} \to 0$ unif. sur [0,1], donc $\sum\limits_{i=0}^{i=2} \to 0$ unif. sur [0,1] aussi.

$\sum\limits_{i=0}^{i=1} \to \mathrm{X}(\mathrm{X}^p))^{(k)} + k(\mathrm{X}^p)^{(k-1)}$ unif. sur [0,1].

<u>indication de correction</u> : Développer cette dernière quantité pour obtenir $(\mathrm{X}^{(p+1)})^{(k)}$, ce qui achève la dém. et en particulier il est établi :

$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, B_n(\mathrm{X}^p) \to \mathrm{X}^p \text{ unif. sur } [0,1].}$

4. Par linéarité, $B_n(Q) \to Q$ unif. sur [0,1]. Soit $f \in \mathcal{C}[0,1]$.

$\|B_n(f) - f\| \leq \|B_n(f) - B_n(Q)\| + \|B_n(Q) - Q\| + \|Q - f\| \leq 2\|Q - f\| + \|B_n(Q) - Q\|$.
(J'utilise $\|B_n(f)\| \leq \|f\|$ facile à prouver sur la déf de $B_n(f)$.)
Il existe Q tel que $\|f - Q\| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$, d'après Partie 2.
Q étant désormais fixé, $\|B_n(Q) - Q\| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$ si $n \geq n_1$.
Finalement : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, [n \geq n_1 \Longrightarrow \|B_n(f) - f\| \leq \varepsilon]$.

si vous décelez une erreur dans ce texte ou dans un énoncé en cours d'année, si vous avez besoin d'une explication, n'hésitez pas à écrire à gecassayre@orange.fr.