Lycée La Martinière Monplaisir

Jean-Marie Monier

Agrégation interne de Mathématiques 2007-2008

Épreuve du samedi 1er décembre 2007

Si un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) la signale sur sa copie et devra poursuivre sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il (elle) est amené(e) à prendre.

Définitions et notations

On note $\mathcal{D}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-périodiques, continues par morceaux et telles que : $\quad \forall\, t \in \mathbb{R},\ \ f(t) = \dfrac{1}{2}\Big(\lim\limits_{t^-} f + \lim\limits_{t^+} f\Big)$,
et $\mathcal{C}$ le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$ des applications 2π-périodiques et continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
On munit $\mathcal{D}$ du produit scalaire hermitien $(.\,|\,.)$ défini par :

$$\forall\,(f,g) \in \mathcal{D}^2,\ \ (f\,|\,g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\,\mathrm{d}t,$$

et de la norme $||.||_2$ associée, définie par : $\ \forall\, f \in \mathcal{D},\ \ ||f||_2 = \Big(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}$.

Pour toute $f \in \mathcal{D}$, on note : $\ ||f||_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Pour toute $f \in \mathcal{D}$, on note $\overline{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ \ t \longmapsto \overline{f(t)}$ et $f^\vee : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ \ t \longmapsto f(-t)$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $e_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ \ t \longmapsto \mathrm{e}^{int}$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et toute $f \in \mathcal{D}$, on note $c_n(f)$ le coefficient de Fourier exponentiel d'indice n de f, défini par : $\qquad c_n(f) = (e_n\,|\,f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t$.

Une suite complexe $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indexée par $\mathbb{Z}$ est dite sommable si et seulement si les deux séries complexes $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \alpha_n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \alpha_{-n}$ sont absolument convergentes ; dans ce cas, on note $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n$ le nombre complexe défini par : $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n}\Big) + \alpha_0 + \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n\Big)$.

On note ℓ^2 l'ensemble des suites complexes $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indexées par $\mathbb{Z}$ telles que la suite $(|\alpha_n|^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit sommable.

On note $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application 2π-périodique, impaire, vérifiant $\varphi(t) = \dfrac{\pi - t}{2}$ pour tout $t \in]0\,;\pi]$.

$\boxed{\textbf{Q1}}$ Soit $f \in \mathcal{D}$.

a. Montrer que f est bornée. On note $||f||_\infty = \operatorname*{Sup}_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$.

b. Montrer que $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas de a dans $\mathbb{R}$.

c. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $f = 0$.

d. Établir que, si $f \in \mathcal{C}$, alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ **a.** Établir que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale dans $\mathcal{D}$ pour $(.\,|\,.)$.

b. Pour tout $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$, calculer $c_n(e_p)$.

c. Montrer : $\quad \forall\, f \in \mathcal{D},\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ \ c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$ et $c_n(f^\vee) = c_{-n}(f)$.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ **a.** Soient $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$, $\beta = (\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$ deux éléments de ℓ^2. Démontrer que la suite $(\overline{\alpha_n}\,\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

b. En déduire que ℓ^2 est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel pour les lois usuelles, et que l'application $(\alpha,\beta) \longmapsto \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{\alpha_n}\,\beta_n$ (avec les notations de **a.**) définit un produit scalaire hermitien sur ℓ^2, qui sera noté $<.\,,\,.>$.

$\boxed{\textbf{Q4}}$ Établir que, pour tout $t \in]0\,;\pi]$, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin nt}{n}$ converge et a pour somme $\dfrac{\pi - t}{2}$ (on pourra utiliser φ).

$\boxed{\textbf{Q5}}$ **a.** Montrer que, pour toute $f \in \mathcal{D}$, la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ appartient à ℓ^2 et : $c_n(f) \underset{|n| \longrightarrow \infty}{=} o(1)$.

On note $\varGamma$ l'application de $\mathcal{D}$ dans ℓ^2 qui, à toute f de $\mathcal{D}$, associe $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$.

b. Montrer que $\varGamma$ est linéaire et conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall\,(f,g) \in \mathcal{D}^2,\quad <\varGamma(f)\,,\,\varGamma(g)> = (f\,|\,g)$$

et montrer que $\varGamma$ est injective.

$\boxed{\textbf{Q6}}$ **a.** Démontrer que, pour toutes $f, g \in \mathcal{D}$, l'application $f * g$, appelée convoluée de f et g, donnée par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad (f*g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u,$$

est correctement définie et est 2π-périodique.

b. Montrer que, pour toutes $f, g \in \mathcal{C}$, on a : $f * g \in \mathcal{C}$.

On admet dorénavant que, pour toutes $f, g \in \mathcal{D}$, on a : $f * g \in \mathcal{C}$.

Ceci définit une loi de composition interne $*$ dans $\mathcal{D}$.

$\boxed{\textbf{Q7}}$ Établir les formules suivantes, pour toutes $f, g \in \mathcal{D}$ et tous $n, p \in \mathbb{Z}$:

1) $f * g = g * f$ *2)* $c_n(f) = (f * e_n)(0)$ *3)* $f * e_n = c_n(f)e_n$

4) $e_n * e_p = \delta_{n,p}e_n$, où $\delta_{n,p} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = p \\ 0 & \text{si} \quad n \neq p \end{cases}$ *5)* $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$

6) $\overline{f * g} = \overline{f} * \overline{g}$ *7)* $(f * g)^\vee = f^\vee * g^\vee$ *8)* $(f \mid g) = (\overline{f} * (g^\vee))(0)$.

$\boxed{\textbf{Q8}}$ **a.** Déterminer $\varphi * \varphi$ (on exprimera $\varphi * \varphi(t)$ en fonction de t).

Tracer la courbe représentative de $\varphi * \varphi$ (unité : 2 cm).

b. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de $\varphi * \varphi$ et en déduire, pour tout $t \in [0\,;\pi]$, la valeur de la somme de série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nt}{n^2}$.

c. En déduire, pour tout $(a, b) \in [0\,;\pi]^2$ tel que $a \leqslant b$ et $a + b \leqslant \pi$, les valeurs des sommes de séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin na \sin nb}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos na \cos nb}{n^2}$.

$\boxed{\textbf{Q9}}$ Soient $f, g \in \mathcal{C}$, $k, l \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Montrer que, si f est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et g de classe C^l sur $\mathbb{R}$, alors $f * g$ est de classe C^{k+l} sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $(i, j) \in \{0, ..., k\} \times \{0, ..., l\}$:

$$(f * g)^{(i+j)} = f^{(i)} * g^{(j)}.$$

$\boxed{\textbf{Q10}}$ Soient $f \in \mathcal{D}$, $k \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que, si f est de classe C^k sur $\mathbb{R}$, alors : $c_n(f) = \underset{|n| \longrightarrow \infty}{o}(n^{-k})$.

b. Établir que, si $k \geqslant 2$ et si $c_n(f) = \underset{|n| \longrightarrow \infty}{o}(n^{-k})$, alors f est de classe C^{k-2} sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{Q11}}$ Soient $f \in \mathcal{C}$, $k \in \mathbb{N}$. On suppose $k \geqslant 4$ et f de classe C^k sur $\mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe $g \in \mathbb{C}$ telle que : $g * g = f$.

$\boxed{\textbf{Q12}}$ Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $r \in]0\,;1[$, on note $P_r(t) = \dfrac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2}$.

a. Pour $r \in]0\,;1[$, étudier les variations de la restriction de P_r à $[-\pi\,;\pi]$, et tracer sa courbe représentative dans le cas $r = \dfrac{3}{4}$ (unité : 1 cm).

b. Montrer que, pour tout $r \in]0\,;1[$, P_r est dans $\mathcal{C}$ et que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad P_r(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos nt.$$

c. Calculer $c_n(P_r)$ pour tout $r \in]0\,;1[$ et tout $n \in \mathbb{Z}$.

d. Établir : $\forall\, (r, s) \in]0\,;1[^2, \quad P_r * P_s = P_{rs}$.

Q13 **a.** Démontrer, pour toute $f \in \mathcal{C}$: $\|P_r * f - f\|_\infty \underset{r \longrightarrow 1^-}{\longrightarrow} 0$.

b. En déduire que toute $f \in \mathcal{C}$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Q14 **a.** Soit $f \in \mathcal{D}$. Montrer que, si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, alors la suite $(n\, c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est dans ℓ^2.

b. La réciproque du résultat de **a.** est-elle vraie ? On pourra examiner le cas de $f \in \mathcal{D}$ telle que $f(t) = \sqrt[3]{t^2}$ pour tout $t \in [-\pi\,;\pi]$.

Pour toute $f \in \mathcal{D}$, on note $L_f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ l'application définie par : $\forall\, g \in \mathcal{D}, \quad L_f(g) = f * g$.

Q15 Soit $f \in \mathcal{D}$.

a. Montrer que L_f est linéaire et que, pour toute $g \in \mathcal{D}$:

$$\|L_f(g)\|_\infty \leqslant \mathrm{Min}\,(\|f\|_\infty\|g\|_1,\ \|f\|_2\|g\|_2,\ \|f\|_1\|g\|_\infty).$$

b. Montrer que, si f est paire et à valeurs réelles, alors L_f est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{D}$, c'est-à-dire : $\forall\,(g_1, g_2) \in \mathcal{D}^2, \quad (L_f(g_1) \,|\, g_2) = (g_1 \,|\, L_f(g_2))$.

Q16 Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme L_{e_n}, c'est-à-dire les couples (λ, f) de $\mathbb{C} \times (\mathcal{D} - \{0\})$ tels que $L_{e_n}(f) = \lambda f$.

Pour toute $f \in \mathcal{D}$ et tout $h \in]0\,;\pi[$, on note $f_h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_h(t) = \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Q17 Montrer que, pour toute $f \in \mathcal{D}$ et tout $h \in]0\,;\pi[$, f_h est élément de $\mathcal{C}$.

On note, pour tout $h \in]0\,;\pi[$, S_h l'application de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$ qui, à tout élément f de $\mathcal{D}$, associe f_h.

Q18 Montrer que, pour tout $h \in]0\,;\pi[$, S_h est une application linéaire, non surjective.

Q19 Calculer, pour toute $f \in \mathcal{D}$ et tout $h \in]0\,;\pi[$, les coefficients de Fourier exponentiels $c_n(f_h)$ de f_h en fonction de h et des $c_n(f)$.

Q20 Soit $h \in]0\,;\pi[$. Démontrer que S_h est injective si et seulement si $\dfrac{h}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

Q21 Soit $f \in \mathcal{C}$.

a. Démontrer : $\|f_h - f\|_\infty \underset{h \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0$.

b. En déduire, sans utiliser le résultat de Q13, que toute $f \in \mathcal{C}$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que, si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, alors : $\forall\, h \in]0\,;\pi[, \quad \|f_h - f\|_\infty \leqslant \dfrac{\|f'\|_\infty}{2} h$.

$* - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - *$