Agrégation interne gc .

Intégration : Suites et séries de fonctions. Fonctions définies par des intégrales.

1 Les théorèmes de l'intégration liés aux suites et séries de fonctions.

1.1 Intégration sur [a, b] et suites de fonctions.

Théorème 1 (***intégration sur*** $[a,b]$ ***only***) Soit $f_n : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ telle que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue.
2. f_n converge uniformément vers vers f sur [a,b].

Alors f est continue sur [a,b] et $\displaystyle\int_{[a,b]} f_n \to \int_{[a,b]} f$.

Corollaire Adapter ce théorème aux séries de fonctions en utilisant les sommes partielles à la place de f_n .

1.2 Intégration sur un intervalle quelconque et suites de fonctions.

Théorème 2 (de convergence dominée) Soit $f_n : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I.
2. f_n converge simplement vers f sur I.
3. f est continue par morceaux sur I.
4. (domination). Il existe une fonction ϕ, continue par morceaux sur I, positive, intégrable sur I et telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \phi$.

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est intégrable,f est intégrable et $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f_n \to \int_{\mathrm{I}} f$.

Remarque Ce th. s'applique aussi quand I = [a, b]. L'hypothèse de domination est alors souvent évidente.

Théorème 3 (de convergence monotone) Soit $f_n : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et positives.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur I.
2. f_n converge simplement vers f sur I.
3. f est continue par morceaux sur I.

Alors $\displaystyle(\int_{\mathrm{I}} f_n)$ est une suite majorée si et seulement si f intégrable sur I . Dans ce cas, $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f_n \to \int_{\mathrm{I}} f$.

Corollaire Adapter ce th aux séries de fns positives en utilisant les sommes partielles à la place de f_n .

1.3 Intégration sur un intervalle quelconque et séries de fonctions.

Théorème 4 (interversion séries-intégrales) Soit $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n continue par morceaux sur I et intégrable sur I .
2. la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur I.
3. la somme de la série $\sum f_n$ est continue par morceaux sur I.
4. la série numérique $\displaystyle\sum \int_{\mathrm{I}} |f_n|$ converge.

Alors :

1. $\sum f_n$ est intégrable sur I . 2. $\displaystyle\int_I |\sum f_n| \leq \sum \int_I |f_n|$. 3. Dans ce cas $\displaystyle\sum \int_{\mathrm{I}} f_n = \int_{\mathrm{I}} \sum f_n$.

Attention : ce théorème ne s'appelle pas " convergence dominée ou monotone pour les séries ".

2 Fonctions définies par des intégrales.

Il existe de nombreuse variantes et sous variantes à ces théorèmes. Je privilégie les théorèmes utilisant les propriétés de $f(x,t)$ fonction du couple de deux variables, conformes aux programmes de l'agreg. intenne. Ils nécéssitent, en général, une rédaction plus courte que ceux privilégiant les fonctions partielles $t \to f(x,t)$ et $x \to f(x,t)$. Les ths utilisant $x \to f(x,t)$ et $t \to f(x,t)$ sont ceux qui figurent actuellement dans les manuels des classes préparatoires.

2.1 intégration sur I=[a,b].

Théorème 5 (***Continuité sous le signe somme***) Soit X un intervalle qq de $\mathbb{R}$, I = [a,b] un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : (x,t) \in \mathrm{XxI} \to f(x,t)$ continue sur X x I.
Alors $F : x \in \mathrm{X} \to \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue.

Théorème 6 (***Dérivation sous le signe somme***) Soit X un intervalle qq de $\mathbb{R}$, I = [a,b] un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : (x,t) \in \mathrm{XxI} \to f(x,t)$ de classe C^1 sur X x I.
Alors $F : x \in \mathrm{X} \to \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur X et $\mathrm{F}'(x) = \displaystyle\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

pas d'hypothèse de domination quand l'intervalle d'intégration est un segment!!!

2.2 intégration sur I quelconque.

Théorème 7 (***Continuité sous le signe somme.***) Soit X un intervalle qq de $\mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : (x,t) \in \mathrm{XxI} \to f(x,t)$ définie sur X x I.

1. $f : (x,t) \in \mathrm{XxI} \to f(x,t)$ est continue sur X x I.
2. $\exists \phi : t \to \phi(t)$, positive, intégrable sur I, telle que $\forall (x,t) \in \mathrm{XxI}$, $|f(x,t)| \le \phi(t)$.

Alors $\forall x \in \mathrm{X}$, $t \to f(x,t)$ est intégrable sur I et $F : x \in \mathrm{X} \to \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue.

Théorème 8 (***Dérivation sous le signe somme.***) Soit X un intervalle qq de $\mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : (x,t) \in \mathrm{XxI} \to f(x,t)$ définie sur X x I.

1. $(x,t) \to f(x,t)$ est de classe C^1 sur X xI.
2. $\exists \phi : t \to \phi(t)$, positive, intégrable sur I, telle que $\forall (x,t) \in \mathrm{XxI}$, $|f(x,t)| \le \phi(t)$.
3. $\exists \psi : t \to \psi(t)$, positive, intégrable sur I, telle que $\forall (x,t) \in \mathrm{XxI}$, $|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \le \psi(t)$.

Alors :

1. $\forall x \in \mathrm{X}$, $t \to f(x,t)$ et $t \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont intégrables sur I.
2. $F : x \to \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur X et $\forall x \in \mathrm{X}$, $F'(x) = \displaystyle\int_{\mathrm{I}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque 1. Il se peut que les hypothèses de domination ne soit pas vérifiée globalement sur X. On utilise alors, si c'est possible, des hypothèses de domination locale.
Remarque 2. Les théorèmes de dérivation s'étendent aux fonctions de classe C^n ou C^∞.