Ag.int. 20/06/07 de 16h à 18h.GC.

Objectifs : révisions sur les suites, calculs concernant les intégrales, les fonctions définies par des intégrales , les équivalents et les développements limités. Les parties sont largement indépendantes. La plupart des questions sont simples, il y a quelques indications.

Partie 1. Moyenne arithmético-géométrique.

Soit a et b deux réels strictement positifs et deux suites (a_n) et (b_n) défines par les conditions initiales $a_0 = a, b_0 = b$ et par les relations de récurrence $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n)$.

1. Comparer pour tout $n > 0$, a_n et b_n.

2. Montrer que les deux suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite notée $l(a,b)$.
($l(a,b)$ est la moyenne arithmético- géométrique de a et b).

3. Montrer que pour tout $n > 0$, $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \dfrac{1}{8a_1}(b_n - a_n)^2$.

4. On choisit un rang $n_0 > 0$ tel que $b_{n_0} - a_{n_0} < 8a_1$.
Montrer qu' il existe $\lambda \in]0,1[$ et $M > 0$ tel que $\forall n \geq n_0, b_n - a_n \leq M\lambda^{2^n}$.

Partie 2. Fonctions définies par des intégrales.

a et b étant toujours deux réels strictement positifs, on considère l'intégrale

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}}$$

1. Montrer que cette intégrale existe.

2. Trouver une relation entre $I(a,b)$ et $I(1, \dfrac{b}{a})$.

Dans la suite, on définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = I(1,x)$.

3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque pour 3. et 4. : réviser les ths de continuité et de dérivation sous $\displaystyle\int$.

5. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.

Indications : pour 0, utiliser $\int_0^{+\infty} \geq \int_0^1$.
pour $+\infty$, on peut utiliser la décroissance de f et le th de cv dominée.

6. On considère les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$u(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+x^2)}}$ et $v(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+x^2}}$.

6.a. Calculer $v(x)$. rappel : penser à $\ln(y + \sqrt{1+y^2})$... !

6.b. Etablir : $\forall y \geq 0, \sqrt{1+y} \leq 1 + \dfrac{y}{2}$; et en déduire que $v - u$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

6.c. Donner un équivalent simple de f en 0.

7. Trouver une relation entre $f(x)$ et $f(\dfrac{1}{x})$. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Partie 3. Lien entre $l(a,b)$ et $I(a,b)$.

On définit ds cette partie :

$$J(a,b)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}$$

1. Quelle est la relation entre $I(a,b)$ et $J(a,b)$?

2. Montrer que l'application ϕ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(t)=\frac{1}{2}(t-\frac{ab}{t})$ est un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. En utilisant le changement de variables $s=\phi(t)$ établir la relation : $J(\sqrt{ab},\frac{a+b}{2})=2I(a,b)$.

le calcul peut apparaitre laborieux, mais tout s'arrange...

3. En déduire que pour tout naturel n, $I(a,b)=I(a_n,b_n)$,(a_n) et (b_n) étant définies comme en I.

4. Montrer $I(a,b)=\dfrac{\pi}{2l(a,b)}$.

Partie 4. Propriétés de f.

On note, pour tout entier naturel k, $\gamma_k=\dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$.

1. Démontrer que pour tout $x>0$,

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+x^2\cos^2\theta}}$$

En déduire que f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Démontrer que pour tout $u\geq 0$, pour tout naturel n,

$$|\frac{1}{\sqrt{1+u}}-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\gamma_k u^k|\leq\gamma_{n+1}u^{n+1}$$

3. Exprimer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2k}\theta\,\mathrm{d}\theta$ à l'aide de γ_k.*(Wallis)*

4. Soit g la fonction définie sur]-1, $+\infty$[par :

$$g(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1+x\cos^2\theta}}$$

Montrer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ l'existence d'un développement limité de g d'ordre n en 0 que l'on précisera.

5. Exprimer, pour tout $h\in]-1,1[$, $f(1+h)$ à l'aide de g. En déduire le développement limité d'ordre 2 de $h\to l(1,1+h)$ en 0.