Soit I le segment $[0,1]$; une fonction réelle f, définie sur l'intervalle I, est continue par morceaux s'il existe une subdivision finie de I: $0 = x0 < x1 < x2 < \cdots < x_n = 1$, telle que la restriction de la fonction f à chacun des intervalles ouverts $]x_{i-1}, x_i[$, $1 \leqslant i \leqslant n$, est continue et se prolonge en une fonction continue sur l'intervalle fermé $[x_{i-1}, x_i]$. Il est admis qu'une fonction f continue par morceaux sur I est bornée. La borne supérieure des valeurs prises par la fonction $|f|$ est désignée par $\|f\|$, ($\|f\| = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|$).

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues par morceaux sur I. Il est admis que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé.

Les suites considérées dans ce problème sont des suites de nombres réels indexés par des entiers strictement positifs: $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Suite équirépartie dans I: une suite $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels a_n, $n \in \mathbb{N}^*$, appartenant à l'intervalle I, $(0 \leqslant a_n \leqslant 1)$ est équirépartie dans I, si et seulement si, pour toute fonction f de E, la suite des moyennes arithmétiques des valeurs prises par la fonction f aux N points a_n, $1 \leqslant n \leqslant N$, est convergente et de limite l'intégrale de la fonction f étendue à l'intervalle I:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(a_n) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Suite équirépartie modulo I: étant donnée une suite de réels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite des réels définis par la relation: pour tout entier n strictement positif $a_n = r_n - [r_n]$, où $[r_n]$ est la partie entière du réel r_n ($[r_n]$ est un entier tel que $[r_n] \leqslant r_n < [r_n] + 1$). La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie modulo I, si et seulement si la suite des réels a_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est équirépartie dans I.

I] [Un critère d'équirépartition:] Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels $a_n, n \in \mathbb{N}^*$, appartenant à l'intervalle I. Soit F_A le sous-ensemble des fonctions de l'espace E pour lesquelles la relation ci-dessous a lieu:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(a_n) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

1^o) Démontrer que le sous-ensemble F_A de E est un sous-espace vectoriel de E et que toutes les fonctions constantes de E appartiennent au sous-espace vectoriel F_A.

2°) Soit g une fonction de l'espace E telle que, pour tout ε positif donné, il existe deux fonctions f_1 et f_2 appartenant au sous-espace vectoriel F_A telles que la fonction g soit comprise entre f_1 et f_2 et l'intégrale de la fonction g étendue à I soit comprise à ε près entre les intégrales des fonctions f_2 et f_1:

- pour tout réel x de I, $f_1(x) \leqslant g(x) \leqslant f_2(x)$,
- $\int_0^1 f_2(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon \leqslant \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon$.

Démontrer que la fonction g appartient au sous-espace vectoriel F_A.

3°) Démontrer que, pour que la suite A soit équirépartie dans I, il suffit que le sous-espace vectoriel F_A contienne une partie P de E dense dans E.

II] [Une condition nécessaire et suffisante d'équirépartition:] Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels a_n, $n \in \mathbb{N}^*$, appartenant à l'intervalle $I = [0,1]$. Soit J un intervalle, contenu dans l'intervalle I, d'extrémités c et d; soit h_J la fonction égale à 1 sur l'intervalle J et à 0 sur le complémentaire de J dans I: $h_J(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ appartient à } J \text{ contenu dans } I, \\ 0 & \text{si } x \text{ appartient à } I \text{ sans appartenir à } J. \end{cases}$

1°) Démontrer que, pour que la suite A soit équirépartie dans I, il suffit que, pour tout intervalle J de I, la fonction h_J appartienne au sous-espace F_A de E.

2°) Soit J un intervalle dont les extrémités c et d vérifient les inégalités: $0 < c < d < 1$. Étant donné un réel positif ε donné, $(\varepsilon > 0)$, déterminer deux fonctions continues f_1 et f_2 vérifiant les relations:

- $f_1(0) = f_1(1)$, $f_2(0) = f_2(1)$, pour tout réel x de I, $f_1(x) \leqslant h_J(x) \leqslant f_2(x)$,
- $\int_0^1 f_2(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon \leqslant \int_0^1 h_J(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon$.

La construction claire des graphes des deux fonctions f_1 et f_2 tient lieu de réponse. Il est admis que la conclusion précédente est valable pour tout intervalle J, contenu dans l'intervalle I, sans que la condition $0 < c < d < 1$ sur ses extrémités soit réalisée. En déduire: pour que la suite $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit équirépartie dans I, il suffit que toutes les fonctions continues prenant mêmes valeurs aux extrémités 0 et 1 de l'intervalle I appartiennent au sous-espace vectoriel F_A de E.

3°) Étant donné un entier N ($N > 0$), soit $N(J)$ le nombre de termes a_n de la suite A qui appartiennent à l'intervalle J et dont les indices n sont inférieurs ou égaux à N; démontrer que, pour que la suite A soit équirépartie dans I, il faut et il suffit que, pour tout intervalle J, la suite des réels $\frac{N(J)}{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$, soit convergente et de limite $d - c$, lorsque l'entier N croît vers l'infini:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N(J)}{N} = d - c\,.$$

III] [Un critère d'équirépartition modulo I (théorème de Bohl):] Étant donnés une suite de réels $R = (r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et deux entiers naturels k et N strictement positifs, soit $C(R, k, N)$ le nombre complexe défini par la relation suivante:

$$C(R, k, N) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \exp(2i\pi k r_n)\,.$$

1°) Démontrer que, si la suite $R = (r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie modulo I, pour tout entier k strictement positif, la limite de l'expression $C(R, k, N)$, lorsque l'entier N croît indéfiniment, est nulle:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \exp(2i\pi k r_n) = 0\,.$$

2°) Démontrer réciproquement, qu'une suite de réels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie modulo I, si, pour tout entier k strictement positif, la limite, lorsque l'entier N croît vers l'infini, de l'expression $C(R, k, N)$ est nulle.

3°) Exemple: soit θ un réel donné. Démontrer que la suite des réels $n\theta$, $n \in \mathbb{N}^*$, est équirépartie modulo I si et seulement si le réel θ est irrationnel.

Dans les questions suivantes le résultat classique de Cesaro est admis et peut être utilisé: si une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et de limite ℓ, la suite de terme général $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n$, $N \in \mathbb{N}^*$, est convergente et de limite ℓ.

IV] [Exemples de suites équiréparties modulo I:] Dans cette question la suite $R = (r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ considérée est définie à partir d'une fonction φ réelle définie sur la demi-droite fermée $[1, \infty[$: pour tout entier n ($n \geqslant 1$) $r_n = \varphi(n)$. Soient r_n, A_n les nombres complexes définis par les relations suivantes:

$$d_n = r_{n+1} - r_n, \quad A_n = \exp(2i\pi r_n)\,.$$

La fonction φ, définie sur la demi-droite $[1, \infty[$, est supposée à valeurs positives, de classe $\mathcal{C}^2$, concave ($\varphi'' \leqslant 0$). En outre, dans un voisinage de l'infini, sa dérivée φ' est négligeable devant 1 et la fonction $\frac{1}{t}$ devant $\varphi'(t)$ ($\varphi'(t) = o(1)$, $\frac{1}{t} = o(\varphi'(t))$).

1°) Établir que les réels d_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont strictement positifs et que les deux suites de réels d_n et $\frac{1}{nd_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, tendent vers 0 lorsque l'entier n croît vers l'infini.

Soient B_n les nombres complexes définis par la relation:

$$B_n = \frac{1}{2i\pi}\Big(\frac{A_{n+1}}{d_{n+1}} - \frac{A_n}{d_n}\Big)\,.$$

Il est admis que, pour tout entier n strictement positif, l'inégalité ci-dessous a lieu:

$$|A_n - B_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\frac{1}{d_{n+1}} - \frac{1}{d_n}\right| + \pi|d_n| \,.$$

2$^{\mathrm{o}}$) Démontrer, lorsque l'entier N croît vers l'infini, la convergence vers 0 de la suite des réels $\displaystyle\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} A_n$, $N \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} A_n = 0$.

3$^{\mathrm{o}}$) Est-ce que la suite des réels $r_n = \varphi(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, est équirépartie modulo I ?

V] [Suites $(\ln^\alpha(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$:] Étant donné un réel α supérieur ou égal à 1 ($\alpha \geqslant 1$), soient A_α la suite des réels $(\ln^\alpha(n))$, $n \in \mathbb{N}^*$ et ψ_α la fonction, définie sur la demi-droite $[1, \infty[$: $x \longmapsto \ln^\alpha(x)$.

1$^{\mathrm{o}}$) Pour quelles valeurs du réel α, les résultats de la question 4 permettent d'affirmer que la suite A_α est équirépartie ?

2$^{\mathrm{o}}$) Soit f la fonction définie sur la demi-droite $]0, \infty[$: $x \longmapsto \exp(2i\pi\ln(x))$. Déterminer une primitive de cette fonction.

3$^{\mathrm{o}}$) Étant donné un entier N, strictement positif, soient L_N et I_N les deux nombres complexes définis par les relations suivantes: $L_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \exp(2i\pi\ln(n))$; $I_N = \frac{1}{N}\int_1^N \exp(2i\pi\ln(x))\,\mathrm{d}x$. Déterminer les limites, lorsque l'entier N croît vers l'infini, du module $|I_N|$ de I_N et de la différence $L_N - I_N$. Est-ce que la suite A_1, définie ci-dessus, est équirépartie modulo I ?