FORMES LINÉAIRES EN DIMENSION QUELCONQUE

G.BERHUY

1. Introduction

Dans ce qui suit, K est un corps arbitraire, E est un K-espace vectoriel (non supposé de dimension finie) et E^* désignera l'espace des formes linéaires sur E, c'est-à-dire $E^* = \mathscr{L}(E, K)$.

Si V est un sous-espace de E et W est un sous-espace de E^*, on pose

$$V^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \varphi_{|V} = 0\}$$

et

$${}^\perp W = \bigcap_{\varphi \in W} \operatorname{Ker}(\varphi).$$

Lorsque E est de dimension finie, on a les résultats classiques suivants.

Théorème 1.1. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Alors :*

(1) *Pour tout sous-espace V de E, l'intersection des noyaux des formes linéaires s'annulant sur V est égale à V*

(2) *Pour tout sous-espace W de E^*, et pour tout $\psi \in E^*$, on a*

$$\bigcap_{\varphi \in W} \operatorname{Ker}(\varphi) \subset \operatorname{Ker}(\psi) \iff \psi \in W$$

De manière équivalente, pour toutes formes linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in E^*$ linéairement indépendantes, et pour tout $\psi \in E^*$, on a

$$\bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(\varphi_i) \subset \operatorname{Ker}(\psi) \iff \psi \text{ est combinaison linéaire de } \varphi_1, \ldots, \varphi_r.$$

Théorème 1.2. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Alors, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a une bijection entre l'ensemble $\mathcal{V}_{n-k}(E)$ des sous-espaces V de E de dimension $n-k$, et l'ensemble $\mathcal{V}_k(E^*)$ des sous-espaces W de E^* de dimension k, donnée par*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_{n-k}(E) & & \mathcal{V}_k(E^*) \\ V & \longrightarrow & V^\perp \\ {}^\perp W & \longleftarrow & W \end{array}$$

Disons-le tout de suite : ces résultats sont faux en dimension infinie, comme le montre l'exemple suivant.

Date: 6 février 2024.

Exemple 1.3. Soit E un K-espace vectoriel de dimension infinie, et soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E (par exemple, $E = K[X]$, $I = \mathbb{N}$ et $e_i = X^i$).

Pour tout $i \in I$, on note e_i^* la i-ème forme coordonnée, c'est-à-dire la forme linéaire définie par

$$e_i^*(\sum_{k\in I} x_k e_k) = x_i$$

pour tous $x_k \in K$ presque tous nuls.

Posons $W = \mathrm{Vect}_K(e_i^*, i \in I)$. On a alors

$$\bigcap_{\varphi\in W} \mathrm{Ker}(\varphi) \subset \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}(e_i^*) = \{0\}.$$

En effet, soit $x = \sum_{k\in I} x_k e_k \in E$, où les x_k sont presque tous nuls. Si $x \in \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}(e_i^*)$, on a alors $e_i^*(x) = x_i = 0$ pour tout $i \in I$, d'où $x = 0$.

Ainsi, toute forme linéaire ψ n'appartenant pas à W fournit alors un contre-exemple au point (2), puisque la condition à gauche de l'équivalence est automatiquement satisfaite. Soit $\psi \in E^*$ la forme linéaire définie par

$$\psi(\sum_{i\in I} x_i e_i) = \sum_{i\in I} x_i,$$

pour tous $x_i \in K$ presque tous nuls.

Supposons que $\psi \in W$. Il existerait alors un sous-ensemble fini $J \subset I$ tel que $\psi = \sum_{j\in J} \lambda_j e_j^*$. Soit alors $i \in I \setminus J$. Un tel i existe car I est infini et J est fini. On a alors $\psi(e_i) = 1$ d'une part, et $(\sum_{j\in J} \lambda_j e_j^*)(e_i) = 0$ d'autre part, d'où une contradiction.

De même, l'application $W \longmapsto {}^\perp W$ n'établit plus une bijection entre les sous-espaces de E^* et les sous-espaces de E.

En effet, cette application n'est plus injective. Pour le voir, reprenons le même sous-espace W de E^*. On a vu que ${}^\perp W = \{0\}$. Mais le même argument donne également ${}^\perp(E^*) = \{0\}$. Par contre, $W \neq E^*$, comme on l'a déjà constaté.

Le but de cet article est d'une part de démontrer les théorèmes précédents, et d'autre part de voir ce qui peut être sauvé en dimension infinie.

2. Une démonstration classique du théorème 1.1

On suppose ici que E est de dimension finie non nulle.

On a alors le lemme suivant.

Lemme 2.1. *Pour tout sous-espace V de E, et tout sous-espace W de E^*, on a*

$$\dim_K(V^\perp) = \dim_K(E) - \dim_K(V) \quad \textit{et} \quad \dim_K({}^\perp W) = \dim(E) - \dim_K(W).$$

Démonstration. Soit V un sous-espace de E. Considérons l'application linéaire

$$\begin{aligned} \rho\colon E^* &\longrightarrow V^* \\ \varphi &\longmapsto \varphi_{|V}. \end{aligned}$$

Par définition même, on a $\mathrm{Ker}(\rho) = V^\perp$.

De plus, ρ est surjective. En effet, soit U un supplémentaire de V dans E. On a donc $E = U \oplus V$. Si $\psi \in V^*$, soit $\varphi \in E^*$ la forme linéaire définie par

$$\varphi(x_U + x_V) = \psi(x_V) \quad \text{pour tout } x_U \in U \quad \text{et tout } x_V \in V.$$

Par définition, on a $\varphi_{|V} = \psi$, d'où la surjectivité désirée. Par le théorème du rang appliqué à ρ, on a

$$\dim_K(V^\perp) = \dim_K(E^*) - \dim_K(V^*) = \dim_K(E) - \dim_K(V).$$

Soit W un sous-espace de E^*. Notons r sa dimension. Si $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ est une K-base de W, on a aisément l'égalité

$$W^\perp = \bigcap_{\varphi \in W} \mathrm{Ker}(\varphi) = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_i).$$

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une K-base de E. On peut alors écrire

$$\varphi_i\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

pour toux $x_j \in K$.

Le sous-espace ${}^\perp W$ est alors isomorphe à $\mathrm{Ker}(A)$, où $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{r\times n}(K)$. Comme $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ sont linéairement indépendantes, les lignes de A sont linéairement indépendantes, et comme le rang de A est égal au rang de ses lignes, on en déduit que A est de rang r. Le théorème du rang implique alors que

$$\dim_K({}^\perp W) = \dim_K(\mathrm{Ker}(A)) = n - r = \dim_K(E) - \dim_K(W).$$

□

Démonstration. [des théorèmes 1.1 et 1.2] Pour tout sous-espace V de E, et tout sous-espace W de E^*, les définitions impliquent que $V \subset {}^\perp(V^\perp)$ et $W \subset ({}^\perp W)^\perp$. Le lemme précédent montre alors que $\dim_K(V) = \dim_K({}^\perp(V^\perp))$ et $\dim_K(W) = \dim_K(({}^\perp W)^\perp)$.

Comme tous ces sous-espaces sont de dimension finie, on obtient $V = {}^\perp(V^\perp)$ et $W = ({}^\perp W)^\perp$. Les deux théorèmes en découle alors. En effet, le lemme 2.1 montre que si $V \in \mathcal{V}_{n-k}(E)$, alors $V^\perp \in \mathcal{V}_k(E^*)$, et que si $W \in \mathcal{V}_k(E^*)$, alors ${}^\perp W \in \mathcal{V}_{n-k}(E)$.

Les deux égalités précédentes traduisent alors le fait que les applications du théorème 1.2 sont inverses l'une de l'autre, et les points (1) et (2) du théorème 1.1 ne sont que des retraductions de ces égalités. □

3. Une autre démonstration du théorème 1.1

On a déjà constaté que le point (2) du théorème 1.1 n'est plus valable lorsque W est de dimension infinie. En revanche, nous allons démontrer cela reste vrai si W est de dimension finie, indépendamment du fait que E soit de dimension finie ou infinie.

La nature des arguments sera donc assez différente de la démonstration proposée dans le paragraphe précédent. Plus précisément, on va démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.1. *Soit E un K-espace vectoriel non nul.*

(1) *Pour tout sous-espace V de E, l'intersection des noyaux des formes linéaires s'annulant sur V est égale à V*

(2) *Pour tout sous-espace W de E^** **de dimension finie**, *et pour tout $\psi \in E^*$, on a*

$$\bigcap_{\varphi \in W} \mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\psi) \iff \psi \in W$$

De manière équivalente, pour toutes formes linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in E^*$ linéairement indépendantes, et pour tout $\psi \in E^*$, on a

$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_i) \subset \mathrm{Ker}(\psi) \iff \psi \text{ est combinaison linéaire de } \varphi_1, \ldots, \varphi_r.$$

La démonstration reposera sur l'existence de supplémentaires en dimension quelconque, i.e. sur le fait que toute famille libre de E peut se compléter en une base. Pour les lecteurs intéressés par ce genre de question, on notera que cela repose sur l'axiome du choix lorsque E est de dimension infinie.

Comme la nature des points (1) et (2) diffère quelque peu (il n'y a pas d'hypothèse de finitude dans (1)), nous séparerons les démonstrations des deux points.

On commence par s'intéresser au point (1). Nous aurons besoin de deux lemmes.

Lemme 3.2. *Soit E un K-espace vectoriel non nul. Alors, pour tout $x_0 \in E \setminus \{0\}$, il existe une forme linéaire $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x_0) \neq 0$.*

En particulier, $\displaystyle\bigcap_{\varphi \in E} \mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$.

Démonstration. Soit $x_0 \in E$ un vecteur non nul, et soit U un supplémentaire de Kx_0 dans E. On a donc $E = Kx_0 \oplus U$. La forme linéaire

$$\varphi\colon \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & K \\ \lambda x_0 + x_U & \longmapsto & \lambda \end{array}$$

vérifie alors $\varphi(x_0) = 1 \neq 0$.

En particulier, tout vecteur non nul de E n'appartient pas au noyau d'au moins une forme linéaire. L'égalité $\displaystyle\bigcap_{\varphi \in E} \mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ s'ensuit. $\square$

Lemme 3.3. *Soit E un K-espace vectoriel non nul. On suppose que $E = U \oplus V$.*

Alors, pour toute forme linéaire $\psi \in U^*$, l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi \oplus 0 : & E & \longrightarrow & K \\ & x = x_U + x_V & \longmapsto & \psi(x_U) \end{array}$$

est une forme linéaire s'annulant sur V.

De plus, toute forme linéaire $\psi \in E^*$ s'annulant sur V s'écrit de manière unique sous la forme $\varphi = \psi \oplus 0$.

Autrement dit, l'application

$$\begin{array}{rcl} U^* & \longrightarrow & V^\perp \\ \psi & \longmapsto & \psi \oplus 0 \end{array}$$

est un isomorphisme de K-espaces vectoriels.

Démonstration. Le premier point est clair. Soit $\varphi \in E^*$ une forme linéaire s'annulant sur V. Alors, pour tout $x_U \in U$ et tout $x_V \in V$, on a

$$\varphi(x_U + x_V) = \varphi(x_U) = \varphi_{|_U}(x_U) = (\varphi_{|_U} \oplus 0)(x_U + x_V),$$

si bien que $\varphi = \varphi_{|_U} \oplus 0$.

Si maintenant, on a $\varphi = \psi_1 \oplus 0 = \psi_2 \oplus 0$, alors pour tout $x_U \in U$, et pour $i = 1, 2$, on a

$$\psi_i(x_U) = (\psi_i \oplus 0)(x_U) = \varphi(x_U),$$

d'où $\psi_1(x_U) = \psi_2(x_U)$ pour tout $x_U \in U$, soit $\psi_1 = \psi_2$. L'isomorphisme annoncé en découle. □

Démonstration. [du point (1) du théorème 3.1.] Soit V un sous-espace de E, et soit U un supplémentaire de V dans E. On a donc $E = U \oplus V$. Le lemme précédent montre en particulier que l'intersection des noyaux des formes linéaires s'annulant sur V est égal à $\bigcap_{\psi \in U^*} \mathrm{Ker}(\psi \oplus 0)$. Mais alors, par définition de $\psi \oplus 0$, on a $x = x_U + x_V \in \bigcap_{\psi \in U^*} \mathrm{Ker}(\psi \oplus 0)$ si et seulement si $x_U \in \bigcap_{\psi \in U^*} \mathrm{Ker}(\psi)$. Cette dernière intersection étant nulle d'après le lemme 3.2, cela équivaut à dire que $x \in V$, ce que l'on voulait démontrer. □

On passe maintenant au point (2).

Démonstration. [du point (2) du théorème 3.1.] On va démontrer par récurrence sur r que pour toutes formes linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in E^*$ linéairement indépendantes, et pour tout $\psi \in E^*$, on a

$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_i) \subset \mathrm{Ker}(\psi) \iff \psi \text{ est combinaison linéaire de } \varphi_1, \ldots, \varphi_r.$$

Pour $r = 0$, on intersecte une famille vide de sous-espaces de E. Cette intersection est donc E. Si l'on préfère, prendre $r = 0$ revient à dire que l'on prend $W = \{0\}$. Or, le noyau de la forme linéaire nulle est E. Comme une

forme linéaire est nulle si et seulement son noyau contient E, le résultat est trivialement vrai.

Supposons maintenant avoir démontré le résultat pour r formes linéaires, et soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_{r+1}$ $r+1$ formes linéaires linéairement indépendantes.

Soit $j \in [\![1, r+1]\!]$. Alors, il existe $x'_j \in \bigcap_{i \neq j} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$ tel que $\varphi_j(x'_j) \neq 0$. Dans le cas contraire, on aurait $\bigcap_{i \neq j} \mathrm{Ker}(\varphi_i) \subset \mathrm{Ker}(\varphi_j)$. L'hypothèse de récurrence entraînerait alors que φ_j est combinaison linéaire des $\varphi_i, i \neq j$, ce qui contredirait le fait que $\varphi_1, \ldots, \varphi_{r+1}$ sont linéairement indépendantes. Le vecteur $x_j = \varphi_j(x'_j)^{-1} x'_j$ vérifie alors $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ pour tous $i, j \in [\![1, r]\!]$.

Posons $U = \mathrm{Vect}_K(x_1, \ldots, x_{r+1})$. Alors, $E = U \oplus \bigcap_{i=1}^{r+1} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$.

En effet, soit $x \in E$. Supposons que $x = \sum_{j=1}^{r+1} \lambda_j x_j + y$, avec $y \in \bigcap_{i=1}^{r+1} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$ et $\lambda_i \in K$. Alors, pour tout $i \in [\![1, r+1]\!]$, on a

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{r+1} \lambda_j \varphi_i(x_j) + \varphi_i(y) = \sum_{j=1}^{r+1} \lambda_j \delta_{ij} + 0 = \lambda_i.$$

Ainsi, si une telle décomposition existe, elle est unique. Pour conclure à l'existence d'une décomposition selon la somme directe, il suffit de vérifier que, pour tout $x \in E$, on a $x - \sum_{j=1}^{r+1} \varphi_j(x) x_j \in \bigcap_{i=1}^{r+1} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$.

Or, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on a

$$\varphi_i(x - \sum_{j=1}^{r+1} \varphi_j(x) x_j) = \varphi_i(x) - \sum_{j=1}^{r+1} \varphi_j(x) \delta_{ij} = \varphi_i(x) - \varphi_i(x) = 0,$$

d'où le résultat.

On peut maintenant conclure. Soit $\psi \in E^*$ telle que $\bigcap_{i=1}^{r+1} \mathrm{Ker}(\varphi_i) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$.

Pour tous $\lambda_i \in K$ et tout $y \in \bigcap_{i=1}^{r+1} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$, on a d'une part

$$\psi(\sum_{j=1}^{r+1} \lambda_j x_j + y) = \sum_{j=1}^{r+1} \lambda_j \psi(x_j) + \psi(y) = \sum_{j=1}^{r+1} \lambda_j \psi(x_j),$$

le fait que $\psi(y) = 0$ découlant de l'hypothèse sur ψ, et d'autre part

$$(\sum_{i=1}^{r+1} \psi(x_i) \varphi_i)(\sum_{j=1}^{r+1} \lambda_j x_j + y) = \sum_{i,j} \psi(x_i) \lambda_j \varphi_i(x_j) = \sum_{i,j} \psi(x_i) \lambda_j \delta_{ij} = \sum_{j=1}^{r+1} \lambda_j \psi(x_j).$$

Ainsi, $\psi = \sum_{i=1}^{r+1} \psi(x_i)\varphi_i$, et on a fini. $\square$

Cette démonstration a l'avantage de donner une combinaison linéaire explicite, et permet de dégager le résultat suivant.

Théorème 3.4. *Soit E un K-espace vectoriel non nul, et soient $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ des formes linéaires linéairement indépendantes.*

Alors, il existe $x_1, \dots, x_r \in E$ tels que $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ pour tous $i, j \in [\![1, r]\!]$.

De plus, si $\psi \in E^*$ vérifie $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_i) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$, alors $\psi = \sum_{i=1}^{r} \psi(x_i)\varphi_i$.

Remarque 3.5. Lorsque E est de dimension finie, il existe un moyen pratique de calculer des vecteurs $x_1, \dots, x_r$ satisfaisant les relations demandées.

En effet, fixons une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. On peut donc écrire

$$\varphi_i(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j$$

pour tous $\lambda_j \in K$. On complète alors la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{r\times n}(K)$ en une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(K)$. C'est possible puisque les lignes de A sont linéairement indépendantes par hypothèse.

Si l'on note $x_j \in E$ l'unique élément de E dont le vecteur coordonnée dans la base choisie est la j-ième colonne de P^{-1}, alors $x_1, \dots, x_r$ vérifient les conditions demandées.

En effet, si L_i est la i-ème ligne de P, alors, pour tous $i, j \in [\![1, r]\!]$, $\varphi_i(x_j)$ est le produit de L_i par C_j, puisque les r premières lignes de P sont les r lignes de A. Mais comme $PP^{-1} = I_n$, ce produit vaut δ_{ij}.

Remarque plus technique. Notons que, sans axiome du choix, tout s'écroule ! En effet, de manière un peu imprécise, sans l'axiome du choix, on démontre l'existence d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non nul E ne possédant pas de forme linéaire non nulle, si bien que $\bigcap_{\varphi\in E^*} \mathrm{Ker}(\varphi) = E$. Le point (1) du théorème 3.1 tombe alors déjà en défaut avec $V = \{0\}$.

4. La correspondance entre sous-espaces en dimension quelconque

Soit E un K-espace vectoriel non nul. Comme on l'a déjà vu, le théorème 1.2 n'est plus vrai si E est de dimension infinie. Néanmoins, le théorème 3.1 donne quelques résultats positifs en direction d'une possible correspondance (avec des hypothèses supplémentaires à préciser) :

(i) Pour tout sous-espace V de E, on a ${}^{\perp}(V^{\perp}) = V$

(ii) Pour tout sous-espace W de dimension finie de E^*, on a $({}^{\perp}W)^{\perp} = W$.

Afin d'obtenir une version correcte du théorème 1.2 en dimension quelconque, on a besoin d'une définition.

Définition 4.1. Un sous-espace V de E est dit de *codimension finie* si l'espace vectoriel quotient E/V est de dimension finie. Cela revient à dire que tout supplémentaire U de V est de dimension finie. En effet si, $E = U \oplus V$, alors le premier théorème d'isomorphisme appliqué à la projection sur V donne un isomorphisme $E/V \simeq U$.

Dans ce cas, la *codimension* de V dans E, notée $\mathrm{codim}_K(V)$, est la dimension de E/V. C'est aussi la dimension de n'importe quel supplémentaire de V d'après ce qui précède.

Remarque 4.2. Si E est de dimension finie n, alors tout sous-espace V est de codimension finie puisque un supplémentaire de E est nécessairement de dimension finie), et on a $\mathrm{codim}_K(V) = \dim_K(E) - \dim_K(V)$.

On a alors le lemme suivant.

Lemme 4.3. *Soit E un K-espace vectoriel non nul.*

(1) *Pour tout sous-espace V de E codimension k, $V^\perp$ est un sous-espace de E^* de dimension k*

(2) *Pour tout sous-espace W de E^* de dimension k, ${}^\perp W$ est un sous-espace de E de codimension k.*

Démonstration. Soit V soit un sous-espace de E de codimension k. Il existe donc un sous-espace U de dimension k tel que $E = U \oplus V$. D'après le lemme 3.3, on a un isomorphisme $V^\perp \simeq U^*$, si bien que $V^\perp$ est de dimension finie et on a

$$\dim_K(V^\perp) = \dim_K(U^*) = \dim_K(U) = k.$$

Si maintenant W est un sous-espace de E^* de dimension k, soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ une base de W. Le noyau de l'application

$$\begin{aligned} \theta \colon E &\longrightarrow K^k \\ x &\longmapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)) \end{aligned}$$

n'est rien d'autre que $\bigcap_{i=1}^{k} (\mathrm{Ker}(\varphi_i)) = {}^\perp W$. Le premier théorème d'isomorphisme nous donne alors un isomorphisme $E/{}^\perp W \simeq \mathrm{Im}(\theta)$. Or, θ est surjective. En effet, on sait qu'il existe $x_1, \ldots, x_k \in E$ tels que $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ pour tous $i, j \in [\![1, k]\!]$. Ainsi, l'image de θ contient les vecteurs de la base canonique de K^k et est donc égale à K^k tout entier. Le premier théorème d'isomorphisme donne alors un isomorphisme $E/{}^\perp W \simeq K^k$, si bien que ${}^\perp W$ est de codimension k. □

En mettant bout à bout les résultats considérations précédents, on obtient alors le théorème suivant.

Théorème 4.4. *Soit E un K-espace vectoriel non nul. Alors, pour tout $k \geq 0$, on a une bijection entre l'ensemble $\mathcal{V}^k(E)$ des sous-espaces V de E de codimension k, et l'ensemble $\mathcal{V}_k(E^*)$ des sous-espaces W de E^* de*

dimension k, donnée par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}^k(E) & & \mathcal{V}_k(E^*) \\ V & \longrightarrow & V^\perp \\ {}^\perp W & \longleftarrow & W \end{array}$$

Remarque 4.5. Lorsque E est de dimension n, la remarque 4.2 montre que $\mathcal{V}^k(E) = \mathcal{V}_{n-k}(E)$. On retrouve alors exactement le théorème 1.2, étant entendu que les deux ensembles $\mathcal{V}^k(E)$ et $\mathcal{V}_k(E^*)$ sont vides dès que $k > n$.